ÜBER DIE WIRKUNGSWEISE DES GEKNICKTEN MARCONISCHEN SENDERS IN DER DRAHTLOSEN TELEGRAPHIE.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

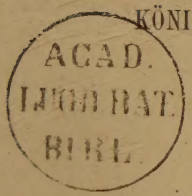
ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
II. SEKTION

DER

KÖNIGL. BAYR. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT
ZU MÜNCHEN



VORGELEGT IM JANUAR 1911

VON

HARALD v. HOERSCHELMANN.

LEIPZIG
JOHANN AMBROSIUS BARTH
1911.

Genehmigt auf Antrag der Herren Professoren

Arthur Sommerfeld u. Excellenz Wilhelm v. Röntgen.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Meiner Mutter gewidmet

Einleitung.

Die Bestrebungen, die Ausbreitung elektrischer Wellen der Praxis dienstbar zu machen und sowohl Umfang als Betriebssicherheit ihrer Anwendungen nach Möglichkeit zu steigern, sind in der Hauptsache auf zwei verschiedene Ziele gerichtet gewesen.

Einmal sind es die Vorgänge bei der Erzeugung und Aufnahme der Wellen, sowie die zeitliche Dämpfung derselben, die ein intensives Interesse beanspruchten, und auf diesem Gebiet hat, dank den Bemühungen hervorragender Forscher, die drahtlose Telegraphie in jüngster Zeit ihre größten Erfolge zu verzeichnen gehabt. Nicht ganz so glückliche Ergebnisse zeitigten die Versuche, die Ökonomie der Raumüberwindung auf eine sichere Grundlage zu stellen. Der Gedanke, die verfügbare ausgesandte Energie nach Möglichkeit nach einer gewünschten Richtung zu konzentrieren, führte naturgemäß auf neue Senderanordnungen, die diese Richtung der Wellen bewirken sollten, und es waren im wesentlichen zwei Prinzipien, die diesen Sendertypen zugrunde lagen. Während die meisten Stationen bei ihren Versuchen die Phasendifferenzen verschiedener, in Abständen voneinander aufgestellter Antennen zu benutzen suchten (Braun), brachte Marconi seinen eigentümlichen „geknickten Sender" zur Anwendung, der aus einem vertikalen und einem sehr viel längeren horizontalen Aste besteht. Mit dieser Anordnung gelang Marconi die Überwindung sehr großer Strecken. Ob dieser Erfolg indessen wirklich nur einer einseitigen Richtung des Energieflusses zuzuschreiben ist, oder zum Teil auf anderen, durch den Sender bedingten günstigen Umständen beruht, scheint nicht einwandfrei festzustehen. Wenigstens sind mir keine Messungen bekannt, die auch für den Fall sehr großer Entfernungen und sehr großer Leitfähigkeit, wie sie das Seewasser aufweist, in dieser Frage absolut entscheidend wären. Experimentell vollkommen sichergestellt ist hingegen

der Richtungseffekt solcher geknickter Sender über festem Boden und bei mäßigen Entfernungen. Hier zeigt die Amplitude der elektrischen Feldstärken auf der einen Seite des Senders bedeutend größere Werte wie auf der entgegengesetzten, und die „Charakteristik" oder das Amplitudendiagramm [1]), in dem die Länge des Fahrstrahls den Betrag der Amplitude in der betreffenden Richtung angibt, hat etwa die Gestalt der Fig. 1.

Es ist eine auf allen Stationen wohlbekannte Tatsache, daß jede schräggestellte Antenne einen ähnlichen, wenn auch bedeutend schwächeren Richtungseffekt hervorruft, und man ist zu der Annahme berechtigt, daß das Vorhandensein einer horizontalen Komponente des im Drahte schwingenden Stromes hier genau dieselbe Rolle spielt, wie der horizontale Zweig des Marconi-Senders.

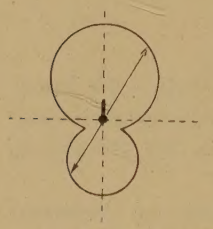


Fig. 1.

Während die Praxis also im allgemeinen die Möglichkeit einer Richtungstelegraphie nach den beiden erwähnten Prinzipien längst erwiesen hat, steht es um die theoretische Deutung und mathematische Beherrschung derselben insofern bedeutend schlimmer, als nur der zuerst erwähnte Fall mehrerer verschieden-phasiger Antennen einer einfachen mathematischen Behandlung zugänglich ist. Betrachtet man nämlich der Einfachheit halber die Antennen als einfache leuchtende Punkte, so besteht hier der auf einfachen Interferenzerscheinungen beruhende Richtungseffekt unverändert fort, auch wenn der ganze Vorgang sich in einem einheitlichen Medium oder über einer vollkommen leitenden Oberfläche abspielt. Man braucht hier also in erster Näherung auf die Mitwirkung der endlichen Leitfähigkeit der Erde nicht weiter einzugehen, und die Phasendifferenz der erregenden Ströme führt auch rechnerisch ohne weiteres zu einem befriedigenden Ergebnis.

Ganz anders liegen die Verhältnisse im Falle des Marconi-Senders. Hier würde für ein einheitliches Medium überhaupt keine Auszeichnung der Richtung stattfinden können, da ein schwingender Dipol in Richtung seiner Achse bekanntlich gar keine Energie aussendet und der horizontale Ast des Senders mithin keine Wirkung hätte. Aber auch im Falle vollkommener Leitfähigkeit würde der Richtungseffekt verschwindend gering werden, da die Erdoberfläche hier als Spiegel aufzufassen ist, so daß nur die Wirkungen zweier um einen kleinen

1) S. Zenneck, Leitfaden der drahtlosen Telegraphie S. 317.

Bruchteil der Wellenlänge voneinander entfernter, gleich polarisierter Dipole von entgegengesetzter Phase übrig blieben, die in der Schwingungsrichtung selbst sich offenbar nahezu vollständig aufheben müßten, wenigstens für Entfernungen, die groß sind gegen die Wellenlänge. Schon von hier aus läßt sich vermuten, daß für die Wirkung des Marconi-Senders die endliche Leitfähigkeit der Erde von ganz hervorragender Bedeutung sein muß, und es ist erklärlich, daß die Versuche zu einer theoretischen Lösung des Problems, die hierauf keine Rücksicht nehmen, bisher zu keinem befriedigenden Ergebnis geführt haben. So hat Poincaré[1]) den Richtungseffekt aus der endlichen Länge des horizontalen Antennenastes zu erklären versucht. Er kommt zu dem Ergebnis, daß der Effekt zwar vorhanden ist, aber mit der Entfernung von zweiter Ordnung gegen die einfache symmetrische Welle verschwindet. Dieses Resultat widerspricht nun den tatsächlichen Verhältnissen durchaus, da ein solcher Effekt bereits in der Entfernung weniger Wellenlängen gar nicht mehr zu beobachten wäre. Da Poincaré indessen die Erde hierbei als vollkommen leitend betrachtet, so gibt sein Resultat wohl keine das Wesen des Problems treffende Antwort.

Schon für den Fall einer einzigen vertikalen Antenne ist die Mitberücksichtigung der Grenzbedingungen des elektromagnetischen Feldes an einer Oberfläche von mittlerer Leitfähigkeit im allgemeinen mit gewissen mathematischen Schwierigkeiten verknüpft. Nachdem Zenneck[2]) das einfachere Problem ebener Wellen, die an einer mäßig leitenden Oberfläche entlang gleiten, untersucht hatte, lieferte zuerst Sommerfeld[3]) eine vollständige Theorie der von einem vertikal schwingenden Dipol ausgesandten Kugelwellen in der Nähe der horizontalen Grenzfläche zweier verschiedener Medien und diskutierte es für den Fall, daß das Verhältnis der Leitfähigkeiten immer noch erheblich von 1 abweicht.

Hierbei ergab sich das interessante Resultat, daß es im wesentlichen zwei Wellentypen sind, die den Vorgang der Ausbreitung beherrschen. Bei mittleren Leitfähigkeiten der Erde bildet sich nämlich eine „Oberflächenwelle“ heraus, deren Intensität nur wie $\frac{1}{\sqrt{r}}$ abnimmt.

1) La lumière électrique 1908, II. Bd. S. 259 ff.

2) Zenneck, Über die Fortpflanzung ebener elektrom. Wellen an einer leitenden Oberfläche. Ann. d. Phys. **23**, 846.

3) Sommerfeld, Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie. Ann. d. Phys. **28**, 665, 1909.

Bei großen Werten der Leitfähigkeit hingegen tritt diese Oberflächenwelle gegen die ursprüngliche Kugelwelle immer mehr zurück und verschwindet gänzlich für den Fall des vollkommenen Leiters.

Wenn also schon bei der Ausbreitung einer einfachen symmetrischen Welle die Erde eine so wesentliche Rolle spielt, so werden wir das um so mehr für die gerichtete Telegraphie zu erwarten haben. Es wird sich im Verlaufe zeigen, daß diese Erwartung vollkommen bestätigt wird und daß der Richtungseffekt ganz wesentlich von dem elektrischen Verhalten der Erde abhängig ist. Dabei soll nur der Fall des Marconischen Senders besprochen werden, da der Fall mehrerer verschiedenphasiger Vertikalantennen sich durch die Kenntnis der Wirkungsweise einer einzigen von selbst erledigt (s. oben!). Es wird sich ergeben, daß der erste dieser Fälle in gewissem Sinne auf den zweiten zurückzuführen ist.

Diese Arbeit gliedert sich im übrigen der größeren Übersicht halber in zwei gesonderte Teile. Im ersten Teil soll das Problem allgemein formuliert und seine Lösung im Hinblick auf die eigentlich physikalischen Tatsachen diskutiert werden, während im Anhang die notwendigen, rein mathematischen Untersuchungen ihren Platz finden. Am Ende des ersten Teiles sind die Hauptresultate zusammengefaßt (S. 48).

Wir werden uns zunächst im ersten Teil durchweg einfach auf die Formeln beziehen, deren Ableitung im Anhang gegeben wird. (Die Ziffer II bezieht sich auf den Anhang.)

Der § 1 des ersten Teiles enthält zunächst die Herleitung der allgemeinen Integralausdrücke für die Komponenten des „Hertzschen Vektors", aus dem die Feldstärken in bekannter Weise zu bilden sind. Dabei wird die Antenne durch zwei einfache Dipole versinnbildlicht, von denen der eine in horizontaler, der andere in vertikaler Richtung schwingt. Die Trennungsfläche zwischen Luft und Erde ist als Ebene gedacht, so daß auf die Erdkrümmung keine Rücksicht genommen wird.

Im § 2 berechnen wir sodann aus den gewonnenen Formeln die in größeren Entfernungen an der Erdoberfläche im ersten Medium (Luft) auftretenden Feldstärken. Es ergibt sich, daß der Richtungseffekt der Anordnung durch einen einfachen, von dem Verhältnis der Längen beider Antennenäste und von den Materialkonstanten abhängigen Ausdruck charakterisiert wird. Dabei zeigt sich, daß dieser Richtungseffekt mit wachsender Leitfähigkeit der Erde rapide abnimmt, während er in praxi sogar noch über Seewasser, das eine sehr große Leitfähigkeit besitzt, deutlich beobachtet wird.

Einer Erklärung dieser Tatsache dient § 3. Der horizontale Teil der Antenne induziert in der Nähe des Senders starke vertikale Ströme in der Erde, die nun ihrerseits gewissermaßen die Rolle von selbständigen Antennen spielen. Die Phasen dieser Ströme sind zu beiden Seiten des Senders einander entgegengesetzt.

Auf die Entfernung wirken dann diese „fingierten Antennen" annähernd ebenso, als wären zu beiden Seiten der ursprünglichen Vertikalantenne zwei neue aufgestellt, deren Phasen sich um π unterscheiden. Auf der einen Seite wird das ursprüngliche symmetrische Feld durch diese beiden Zusatzantennen verstärkt, auf der anderen geschwächt.

Ist nun der Sender zunächst von schlechtleitendem Boden umgeben, der die Entstehung solcher Erdströme begünstigt, so wird sich dieser eigentümliche „Erdstromeffekt" unter allen Umständen hier ausbilden müssen, und wir können uns die ganze Senderanordnung durch die drei oben beschriebenen Vertikalantennen ersetzt denken. Die Wirkung des weiter draußen befindlichen guten Leiters ist dann im wesentlichen eine einfache Spiegelung, die die einmal in der Nähe des Senders erzeugte starke Richtung der Wellen nicht mehr beeinträchtigen kann. Eine nähere Untersuchung der Erdströme geschieht in § 4, während in § 5 gezeigt wird, daß dieselben tatsächlich bis ins einzelne, nach Phase und Intensität, den aus § 3 bekannten Richtungseffekt liefern.

§ 1. Formulierung des Problems und seine allgemeine Lösung.

Der Sender Marconis besteht in Wirklichkeit aus einem vertikalen und einem sehr viel längeren horizontalen Antennenaste, die von demselben Strom durchflossen werden. Die Länge des ersteren ist klein gegen die Wellenlänge, während die Länge des letzteren etwa $^1/_5$ derselben beträgt. Streng genommen wäre also auch für größere Entfernungen diese endliche Länge durchaus zu berücksichtigen. Wenn wir trotzdem beide Zweige der Antenne als einfache in bestimmter Richtung polarisierte Dipole oder „leuchtende Punkte" auffassen, so rechtfertigt sich dies dadurch, daß bei endlicher Leitfähigkeit der Erde auch hier schon der Richtungseffekt vorhanden ist und durch die erwähnte Korrektion nur graduell, nicht mehr prinzipiell abgeändert wird.

Der Einfluß der Erdung ist ferner in praxi für den Wirkungsgrad der aufgewandten Energie von großer Bedeutung. In bezug auf die Verteilung und Ausbreitung der Energie, auf deren Betrachtung

wir uns beschränken, spielt die Erdung indessen nach Überlegungen von Sommerfeld (l. c.) keine Rolle, und wir ziehen es daher vor, die Antenne als ungeerdet zu betrachten, das heißt wir fassen ihren vertikalen Teil ebenfalls als einen in gewisser Entfernung über dem Erdboden schwingenden Dipol auf. Das hat zudem den weiteren Vorteil, daß wir so eine Lösung des Problems finden, bei der die gesamte ausgestrahlte Energie konstant und angebbar bleibt, wie auch die Materialkonstanten der Erde und der Luft variieren mögen, wie wir sehen werden.

Bekanntlich lassen sich die Vektoren des elektromagnetischen Feldes aus einem einzigen Vektor ableiten, dem „Hertzschen Vektor“ [1]), der der Bedingung genügt:

$$c^2 \Delta \mathfrak{Z} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$$

wenn ε, μ und σ Dielektrizitätskonstante, Permeabilität und Leitfähigkeit in Heaviside-Einheiten bedeuten.

Wenn es sich dabei um rein periodische Wellen handelt, so können wir schreiben:

$$\mathfrak{Z} = \frac{ic}{n} \Pi e^{-int} \text{ [2])}$$

und die obige Gleichung geht über in:

$$c^2 \Delta \Pi = \{\varepsilon \mu (-in)^2 + \mu \sigma (-in)\} \Pi$$

oder

$$\Delta \Pi = -k^2 \Pi$$

mit der Abkürzung:

$$k^2 = \frac{\varepsilon \mu n^2 + i \mu n \sigma}{c^2} = \frac{\sigma - in\varepsilon}{c} \cdot \frac{in\mu}{c}$$

Setzt man dann

$$\mathfrak{H} = rot \Pi e^{-int}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{c}{\sigma - in\varepsilon} (grad\, div \Pi + k^2 \Pi) e^{-int}$$

so sind die beiden Maxwellschen Gleichungen für ruhende Körper erfüllt, denn es ist bis auf den Faktor e^{-int}:

1) S. Abraham, Theorie der Elektrizität, II. Bd., § 8, Teubner 1905.

2) Im folgenden ist unter „Hertzscher Vektor“ der einfacheren Schreibweise halber der Vektor $\Pi \cdot e^{-int} = \frac{n}{ic} \mathfrak{Z}$ verstanden.

$$1.\quad \varepsilon\dot{\mathfrak{E}} + \sigma\mathfrak{E} = c(grad\,\partial\,div\,\Pi + k^2\,\Pi)$$
$$= c(grad\,\partial\,div\,\Pi - \Delta\,\Pi)$$
$$= c\,rot\,rot\,\Pi$$
$$= c\,rot\,\mathfrak{H}$$

$$2.\quad rot\,\mathfrak{E} = \frac{ck^2}{(\sigma - in\varepsilon)}\,rot\,\Pi = \frac{i\mu n}{c}\,rot\,\Pi = \frac{-\mu}{c}\dot{\mathfrak{H}}$$

Unser mathematisches Problem formuliert sich nun folgendermaßen: In einem gewissen Abstande a von der Trennungsebene zweier Medien befindet sich ein vertikal und ein horizontal schwingender Dipol, die beide als punktförmige Energiequellen zu betrachten sind und deren Feld dann bekanntlich im einheitlichen Medium aus dem Vektor

$$\mathfrak{P}_z = A \cdot \frac{e^{-ikR}}{R}\,e^{-int}$$
$$\mathfrak{P}_x = -B\frac{e^{ikR}}{R}\,e^{-int}$$

zu berechnen wäre, wobei A und B die Intensitäten der Energiequellen messen sollen und den Längen der beiden Äste des Senders annähernd

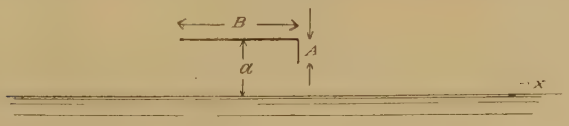


Fig. 2.

proportional sind, sowie der Amplitude des in ihnen schwingenden Stromes. Wir schreiben B mit negativem Vorzeichen, um anzudeuten, daß der horizontale Ast sich nach der negativen X-Richtung erstrecken soll (s. Fig. 2).

Wir suchen nun für jedes der beiden Medien ein elektromagnetisches Feld zu bestimmen, das innerhalb des betreffenden Mediums überall endlich bleibt und das mit dem ursprünglich für das erste Medium gegebenen Felde der beiden Dipole A und B zusammen die Grenzbedingungen an der Ebene $z = 0$ befriedigt. Eine solche Lösung ist dann notwendig eindeutig, wie Sommerfeld[1]) gezeigt hat. Im Gegensatz zu dem „primären" Felde $\mathfrak{P}$ nennen wir das gesuchte Zusatzfeld $\mathfrak{Q}$ das „sekundäre". Das Gesamtfeld $\Pi = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ ist wieder ein Vektor mit den Komponenten Π_x und Π_z.

1) I. c. S. 681.

Die Grenzbedingungen verlangen Stetigkeit der tangentialen Komponenten der Feldstärken bei $z = 0$. Diese Feldstärken haben nach S. 10 in unserem Falle folgende Werte

$$\mathfrak{E}_x = \frac{in\mu}{c}\left\{\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right) + \Pi_x\right\} e^{-int}$$

$$\mathfrak{E}_y = \frac{in\mu}{c}\left\{\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right)\right\} e^{-int}$$

$$\mathfrak{E}_z = \frac{in\mu}{c}\left\{\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right) + \Pi_z\right\} e^{-int}$$

$$\mathfrak{H}_x = \frac{\partial \Pi_z}{\partial y} e^{-int}$$

$$\mathfrak{H}_y = \left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x}\right) e^{-int}$$

$$\mathfrak{H}_z = -\frac{\partial \Pi_x}{\partial y} e^{-int}$$

μ soll noch für beide Medien $= 1$ angenommen werden, was für schnelle Schwingungen erlaubt ist, dann lauten also die vorzugebenden Bedingungen für $z = 0$:

1. $\dfrac{\partial \Pi_{1z}}{\partial y} = \dfrac{\partial \Pi_{2z}}{\partial y}$ 2. $\dfrac{\partial \Pi_{1x}}{\partial z} - \dfrac{\partial \Pi_{1z}}{\partial x} = \dfrac{\partial \Pi_{2x}}{\partial z} - \dfrac{\partial \Pi_{2z}}{\partial x}$

3. $\dfrac{1}{k_1^2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\dfrac{\partial \Pi_{1x}}{\partial x} + \dfrac{\partial \Pi_{1z}}{\partial z}\right\} + \Pi_{1x} = \dfrac{1}{k_2^2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\dfrac{\partial \Pi_{2x}}{\partial x} + \dfrac{\partial \Pi_{2z}}{\partial z}\right\} + \Pi_{2x}$

4. $\dfrac{1}{k_1^2}\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\dfrac{\partial \Pi_{1x}}{\partial x} + \dfrac{\partial \Pi_{1z}}{\partial z}\right\} = \dfrac{1}{k_2^2}\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\dfrac{\partial \Pi_{2x}}{\partial x} + \dfrac{\partial \Pi_{2z}}{\partial z}\right\}$

Statt dieser Bedingungen können wir aber offenbar einfacher verlangen, daß

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \Pi_{1z} = \Pi_{2z} \\ 2. & \Pi_{1x} = \Pi_{2x} \\ 3. & \dfrac{\partial \Pi_{1x}}{\partial z} = \dfrac{\partial \Pi_{2x}}{\partial z} \\ 4. & \dfrac{1}{k_1^2}\left\{\dfrac{\partial \Pi_{1x}}{\partial x} + \dfrac{\partial \Pi_{1z}}{\partial z}\right\} = \dfrac{1}{k_2^2}\left\{\dfrac{\partial \Pi_{2x}}{\partial x} + \dfrac{\partial \Pi_{2z}}{\partial z}\right\} \end{array}\right\} \quad \text{I}$$

sein soll für $z = 0$.

Außerdem sind die vier Funktionen Π_{1x}, Π_{2x}, Π_{1z}, Π_{2z} so zu bestimmen, daß noch folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\,\Pi_{1x} + k_1^{\,2}\,\Pi_{1x} = 0 \\ \Delta\,\Pi_{1z} + k_1^{\,2}\,\Pi_{1z} = 0 \end{array}\right\} \ldots z > 0$$
$$\left.\begin{array}{l} \Delta\,\Pi_{2x} + k_2^{\,2}\,\Pi_{2x} = 0 \\ \Delta\,\Pi_{2z} + k_2^{\,2}\,\Pi_{2z} = 0 \end{array}\right\} \ldots z < 0 \qquad \text{II}$$

Ferner:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_{1x} = 0 \\ \Pi_{1z} = 0 \end{array}\right\} z > 0 \quad r = \infty \quad \text{oder} \quad z = +\infty$$
$$\left.\begin{array}{l} \Pi_{2x} = 0 \\ \Pi_{2z} = 0 \end{array}\right\} z < 0 \quad r = \infty \quad \text{oder} \quad z = -\infty \qquad \text{III}$$

und endlich:

$$\Pi_{1z} - A\frac{e^{ik_1\sqrt{r^2+(z-a)^2}}}{\sqrt{r^2+(z-a)^2}} \qquad z \geqq 0$$
$$\Pi_{1x} + B\frac{e^{ik_1\sqrt{r^2+(z-a)^2}}}{\sqrt{r^2+(z-a)^2}} \qquad z \geqq 0$$
$$\Pi_{2z} \qquad z \leqq 0$$
$$\Pi_{2x} \qquad z \leqq 0$$

Endlich und stetig mit samt den ersten Ableitungen, einschließlich der Stelle $r = 0,\ z = a$ — IV

Bei Benützung von Zylinderkoordinaten sind nun alle Ausdrücke von der Form

$$C\begin{Bmatrix}\sin(n\varphi)\\ \cos(n\varphi)\end{Bmatrix} J_n(\lambda r)\, e^{\pm\sqrt{\lambda^2-k^2}z}$$

bekanntlich partikulare Lösungen der Differentialgleichung $\Delta\Pi + k^2\Pi = 0$, wie die Ausführung der Differentiationen unter Beachtung der für die Besselschen Funktionen gültigen Differentialgleichungen:

$$J_n''(x) + \frac{J_n'(x)}{x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0$$

unmittelbar zeigt.

Setzt man $C = e^{\sqrt{\lambda^2-k^2}\,a}\,\varphi_n(\lambda)\,\lambda$, so ist

$$\begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix} \int_0^\infty J_n(\lambda r)\,\varphi_n(\lambda)\, e^{\pm\sqrt{\lambda^2-k^2}(z+a)}\,\lambda\, d\lambda$$

ebenfalls eine Lösung. Hier muß wegen der Konvergenz des Integrals

das Vorzeichen der Wurzel entsprechend gewählt werden, je nachdem ob $z + \alpha \gtrless 0$ ist.

Durch Addition solcher partikularen Lösungen können wir dann ohne weiteres eine ganz allgemeine Lösung gewinnen. Dabei ist zu beachten, daß der von uns gesuchte Ausdruck jedenfalls in bezug auf die $x - z$-Ebene symmetrisch sein muß, daß wir daher nur die nach $\cos(n\varphi)$ fortschreitenden Glieder beizubehalten brauchen.

So erhalten wir als allgemeinste Lösung

$$\Pi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \cos(n\varphi) \int_0^\infty J_n(\lambda r)\, \varphi_n(\lambda)\, e^{\pm\sqrt{\lambda^2 - k^2}(z+\alpha)}\, \lambda\, d\lambda \qquad (1)$$

In dieser Form läßt sich jede beliebige, in y gerade Funktion von x, y, $(z + \alpha)$ darstellen, die der Differentialgleichung genügt. Es erübrigt nun noch, für vier derartige Funktionen die $\varphi_n(\lambda)$ so zu bestimmen, daß die Grenzbedingungen erfüllt sind.

Hierzu bemerken wir zunächst, daß auch unsere „primären Erregungen", d. h. der Ausdruck

$$\frac{e^{ik\sqrt{r^2 + (z-a)^2}}}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}}$$

sich in eine zu Gleichung (1) analoge Form bringen läßt.

Hierzu dient ganz ähnlich wie bei Sommerfeld [l. c. Gleichung (10)] die Formel:

$$\frac{e^{ik\sqrt{r^2 + (z-a)^2}}}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} = \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, e^{\pm\sqrt{\lambda^2 - k^2}(z-a)}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, \lambda\, d\lambda$$

In dem Gebiete zwischen $z = 0$ und $z = a$ ist hierbei die Wurzel im Exponenten mit positiv reellem Teil zu wählen, was für uns wichtig ist.

Wir setzen nun die gesuchten Komponenten unseres Hertzschen Vektors in dem Gebiet zwischen $z = +a$ und $z = -\infty$ in folgender Form an.

Im Medium 1:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{1z} = A \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z-a)}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}\, \lambda\, d\lambda + \\ + \sum_{n=0}^{n=\infty} \cos(n\varphi) \int_0^\infty J_n(\lambda r)\, f_{1n}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z+a)}\, \lambda\, d\lambda \end{aligned}\right\} \quad (2a$$

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{1x} = -B\int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z-a)}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}\,\lambda\, d\lambda + \\ + \sum_{n=0}^{n=\infty} \cos(n\varphi)\int_0^\infty J(\lambda r)\, F_{1n}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z+a)}\,\lambda\, d\lambda \end{aligned}\right\} \quad (2\,b)$$

Im Medium 2:

$$\Pi_{2z} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \cos(n\varphi)\int_0^\infty J_n(\lambda r)\, f_{2n}(\lambda)\, e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(z-a)}\,\lambda\, d\lambda \quad (2\,c)$$

$$\Pi_{2x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \cos(n\varphi)\int_0^\infty J_n(\lambda r)\, F_{2n}(\lambda)\, e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(z-a)}\,\lambda\, d\lambda \quad (2\,d)$$

Im ersten Medium ist z immer positiv, im zweiten immer negativ, die Exponenten in den Integranden der Zusatzfunktionen können also an keiner Stelle verschwinden, wo diese Funktionen überhaupt zur Anwendung kommen. Daher sind die Integrale sicher konvergent, solange die f_n, F_n nicht gerade mit λ ständig wachsende Exponentialfunktionen enthalten, was, wie sich zeigen wird, nicht der Fall ist. Unsere Bedingung IV ist also bei diesem Ansatz von vornherein erfüllt.

Für das Gebiet von $z = +a$ bis $z = +\infty$ ist natürlich das Vorzeichen von $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ im ersten Term der rechten Seite von Gleichung (2a) und (2b) umzukehren.

Weiter ist zu bemerken, daß wir die Zusatzfunktionen in Form von Fourierschen Reihen geschrieben haben und für die Gleichheit zweier solcher Reihen ist es erforderlich, daß dieselben Glied für Glied übereinstimmen. Um daher die erste der Bedingungen I:

$$\Pi_{1z_{z=0}} = \Pi_{2z_{z=0}}$$

zu erfüllen, haben wir zu verlangen, daß:

$$\left.\begin{aligned} f_{10}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}a} + A\,\frac{e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}a}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} &= f_{20}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}a} \\ f_{11}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}a} &= f_{21}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}a} \\ \vdots \qquad\qquad & \\ f_{1n}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}a} &= f_{2n}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k}} \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \end{aligned}\right\} \quad (3\,a)$$

sein soll.

Ebenso liefert die zweite Bedingung:

$$\left.\begin{aligned} F_{10}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\,a} - \frac{B\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\,a}}{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}} &= F_{20}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\,a} \\ e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\,a} F_{11}(\lambda) &= F_{21}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\,a} \\ \vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\ e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\,a} F_{1n}(\lambda) &= F_{2n}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\,a} \\ \vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \end{aligned}\right\} \quad (3\,\mathrm{b})$$

Die dritte Bedingung verlangt:

$$\frac{\partial\, \Pi_{1x}}{\partial\, z} = \frac{\partial\, \Pi_{2x}}{\partial\, z}$$

also:

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\, F_{10}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\,a} - B\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\,a} &= \\ = F_{20}(\lambda)\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\,a} & \\ -\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\, F_{11}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\,a} = +\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\, F_{21}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\,a} & \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \\ -\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\, F_{1n}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\,a} = +\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\, F_{2n}(\lambda)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\,a} & \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \end{aligned}\right\} \quad (3\,\mathrm{c})$$

Aus Gleichung (3b) und (3c) folgt aber notwendig:

$$F_{1n}(\lambda) = F_{2n}(\lambda) = 0 \qquad n = 1,\ 2,\ 3 \ldots \qquad (4\,\mathrm{a})$$

und

$$F_{20}(\lambda)\{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}+\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\}\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\,a} = -2B\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\,a}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} F_{20}(\lambda) = -2B\, \frac{e^{(\sqrt{\lambda^2-k_2^2}-\sqrt{\lambda^2-k_1^2})\,a}}{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}+\sqrt{\lambda^2-k_2^2}} \end{aligned}\right\} \quad (4\,\mathrm{b})$$

sowie

$$2\, F_{10}(\lambda)\sqrt{\lambda^2-k_1^2} = F_{20}(\lambda)\{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}-\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\}\, e^{(\sqrt{\lambda^2-k_1^2}+\sqrt{\lambda^2-k_2^2})\,a}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} F_{10} = -\frac{B}{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}-\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}+\sqrt{\lambda^2-k_2^2}} = & \\ = -\frac{2B}{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}+\sqrt{\lambda^2-k_2^2}} + \frac{B}{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}} & \end{aligned}\right\} \quad (4\,\mathrm{c})$$

Es bleibt noch die vierte Bedingung zu erfüllen, nämlich:

$$k_2^2 \left(\frac{\partial \Pi_{1z}}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_{1x}}{\partial x} \right) = k_1^2 \left(\frac{\partial \Pi_{2z}}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_{2x}}{\partial x} \right)$$

Eine einfache Rechnung, die wir hier unterdrücken wollen, liefert, wenn man Gleichung (3a) beachtet:

$$f_{1n} = f_{2n} = \ldots = 0 \qquad n = 2, 3 \ldots$$

und gewisse, nicht verschwindende Werte von f_{10}, f_{20}, f_{11}, f_{21}. Trägt man diese in die allgemeinen Integralausdrücke ein, so ergibt sich schließlich das Resultat:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{1z} = {} & A \int_0^\infty \frac{J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z-a)}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \lambda \, d\lambda - A \int_0^\infty \frac{J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z+a)}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \lambda \, d\lambda \\ & + 2 A k_2^2 \int_0^\infty \frac{J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z+a)}}{N} \lambda \, d\lambda + \\ & + 2 B (k_2^2 - k_1^2) \cos\varphi \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z+a)}}{(\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}) N} \lambda^2 \, d\lambda \end{aligned}\right\} \quad (8a)$$

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{2z} = {} & + 2 A k_2^2 \int_0^\infty \frac{J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z - \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} a}}{N} \lambda \, d\lambda \\ & + 2 B (k_2^2 - k_1^2) \cos\varphi \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z - \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} a}}{(\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \sqrt{\lambda^3 - k_2^2}) N} \lambda^2 \, d\lambda \end{aligned}\right\} \quad (8b)$$

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{1x} = {} & - B \int_0^\infty \frac{J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z-a)}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \lambda \, d\lambda + B \int_0^\infty \frac{J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z+a)}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \lambda \, d\lambda \\ & - 2 B \int_0^\infty \frac{J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z+a)}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda \, d\lambda \end{aligned}\right\} \quad (8c)$$

$$\Pi_{2x} = - 2 B \int_0^\infty \frac{J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z - \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} a}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda \, d\lambda \quad (8d)$$

mit der Abkürzung: $N = k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$.

Diese Ausdrücke erfüllen in der Tat alle unsere Bedingungen, denn sie verschwinden für $r = \infty$ und $z = \infty$, wie es gefordert war, befriedigen die Differentialgleichung und die Grenzbedingungen, und bleiben allenthalben endlich bis auf das vorgeschriebene Unendlichwerden von $\frac{e^{ik_1 R}}{R}$ an der Stelle $z = +a$ im ersten Medium. Denn die Zusatzfunktionen konnten nur an solchen Stellen unendlich werden, wo die Exponenten der Integranden verschwinden, und diese Stellen liegen nach dem Bau der Formeln durchweg im anderen Medium (2 oder 1), als demjenigen (1 oder 2), für welches nach den beigefügten Indizes die betreffenden Ausdrücke gelten sollen.

Betrachten wir die gewonnenen Ausdrücke näher.

Π_z setzt sich zusammen aus einem um die Z-Achse symmetrischen Teil und einem von φ abhängigen Term. Der erstere ist identisch mit dem Ausdruck, den man gewinnen würde, wenn nur die Z-Komponente der primären Erregung allein vorhanden wäre, der zweite rührt allein von dem Vorhandensein einer primären X-Komponente her. Die beiden primären Wellen können also jede für sich behandelt werden, denn das von der X-Komponente hervorgerufene Feld hat keinen um die Z-Achse symmetrischen Bestandteil. Dies ist für den Richtungseffekt von wesentlicher Bedeutung.

Das symmetrische Feld im ersten Medium setzt sich ferner zusammen aus der vom Punkte $z = +a$ ausgehenden Welle, aus deren Spiegelbild, d. h. einer einfachen Kugelwelle von entgegengesezter Phase, die vom Punkte $-a$ auszugehen scheint, sowie aus einer von der Leitfähigkeit der Erde abhängigen Zusatzwelle, die ebenfalls von $z = -a$ ausgeht. Im Falle eines einheitlichen Mediums wird $k_1 = k_2 = k$ und $N = 2k^2\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ und es hebt sich das 3. gegen das 2. Glied im Π_z fort, so daß nur die primäre Kugelwelle übrig bleibt. Wird dagegen das zweite Medium vollkommen leitend so ist

$$N = k_2^2\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\left\{1 + \frac{k_1^2\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{k_2^2\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}\right\} = k_2^2\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$$

das 3. Glied wird das Doppelte des zweiten mit positivem Vorzeichen, und wir erhalten eine von $z = -a$ ausgehende Kugelwelle von gleicher Phase, wie die primäre, so daß beide Wellen sich verstärken. Ist a klein gegen die Wellenlänge, so erscheint das Feld also einfach verdoppelt, wie wir es beim vollkommenen Spiegel erwarten müssen.

Wesentlich anders gestalten sich die Verhältnisse für die X-Komponente. Hier resultiert für ein einheitliches Medium zwar ebenfalls die primäre Welle, für $k_2^2 = \infty$ indessen verschwindet die von φ abhängige Z-Komponente vollständig, denn es ist:

$$\frac{1}{(\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_2^2})\,N} = \frac{1}{(k_2^2 - k_1^2)} \left\{ \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}{N} - \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{N} \right\} =$$

$$= \frac{1}{k_2^2 - k_1^2} \quad \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{k_2^2}$$

Von der X-Komponente bleibt nur die primäre Welle selbst, sowie ihr Spiegelbild mit entgegengesetzter Phase übrig, und diese beiden Wirkungen heben sich in größerer Entfernung fast vollständig auf, wenigstens in der Nähe der Grenzfläche, wenn a klein gegen die Wellenlänge ist. Für den unendlich guten Leiter ergibt sich also ein fast völliges Verschwinden des Richtungseffektes in horizontaler Richtung, und es muß daher angenommen werden, daß dieser Effekt wesentlich durch die endliche Leitfähigkeit der Erde bedingt ist. Von wesentlichem Belang ist überhaupt nur die von φ abhängige Z-Komponente und da sie sowohl für ein einheitliches Medium, als auch für den unendlich guten Leiter verschwindet, so muß sie für einen bestimmten Wert von $\frac{k_2^2}{k_1^2}$ ein Maximum haben.

§ 2. Das Feld in größerer Entfernung vom Sender und der Richtungseffekt.

Die im zweiten Teile dieser Arbeit hergeleiteten Formeln ermöglichen es ohne weiteres, explicite Ausdrücke für die elektrischen und magnetischen Feldstärken in der Nähe der Trennungsfläche der beiden Medien anzugeben.

Wir wollen uns in diesem Paragraphen darauf beschränken, die Feldstärken im ersten Medium zu berechnen. Es soll angenommen werden, daß das Verhältnis $\left|\frac{k_2^2}{k_1^2}\right| \geqq 13$ sein soll, d. h. daß wir es für das zweite Medium mit den in der Natur wirklich vorkommenden Bodenarten, sowie mit den langen Wellen der transatlantischen Stationen zu tun haben.[1]) Ferner sollen nur Entfernungen betrachtet werden,

1) Sommerfeld, l. c. S. 722. Vgl. S. 26 dieser Arbeit.

die größer sind als etwa eine halbe Wellenlänge, in welchem Falle sich, wie im zweiten Teil gezeigt ist, die vorkommenden Formeln wesentlich vereinfachen. Für sehr kleine Entfernungen sind unsere Formeln ohnehin zu stark spezialisiert. Es soll also der Wert von

$$|k_1 r| > \frac{2\pi}{l} \cdot \frac{l}{2}$$

und dementsprechend der Wert von $|k_2 r| > \pi \cdot \sqrt{13} \cong 12$ sein.

Zunächst können wir die Formeln der Gleichung (8) noch wesentlich vereinfachen. Ist nämlich a klein gegen die Wellenlänge, was wir annehmen, so ist für größere Entfernungen der Ausdruck:

$$\int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z-a)}\, \lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} - \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\,(z+a)}\, \lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}$$

offenbar durch: $-2a\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ik_1 R}}{R}$ zu ersetzen.

Ferner kann für

$$\cos\varphi \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z}\, \lambda^2\, d\lambda}{(\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_2^2})\, N}$$

wenn man Zähler und Nenner mit $(\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2})$ multipliziert, nach einer einfachen Umrechnung unter Beachtung von (II, 1) geschrieben werden:

$$-2B\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1^4 - k_2^4}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\lambda^2 - s^2} J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z}\, \lambda\, d\lambda \right.$$

$$- \frac{k_1^2(s^2 - k_2^2) + (s^2 - k_1^2)k_2^2}{k_1^4 - k_2^4}\int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z}\, \lambda\, d\lambda}{\lambda^2 - s^2}$$

$$\left. + \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1^4 - k_2^4}\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ik_1 R}}{R}\right\}$$

wobei $s^2 = \frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}$ gesetzt ist.

In der Nähe von $z = 0$ kann der letzte Term der obigen Klammer gestrichen werden, und wenn wir noch $\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$ mit $\sqrt{s^2 - k_2^2}$

identifizieren, was nach II. S. 66 von $r > \frac{1}{4} l$ ab statthaft ist, so erhalten wir:

$$-2B\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{(k_1^2+k_2^2)\sqrt{s^2-k_2^2}}{k_1^4-k_2^4}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}{\lambda^2-s^2} J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}z}\lambda\, d\lambda\right.$$

$$\left. -\frac{s^2(k_1^2-k_2^2)}{(k_1^4-k_2^4)\sqrt{s^2-k_2^2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2-s^2}} J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}z}\lambda\, d\lambda\right\}$$

Wenn endlich noch k_1^2 gegen k_2^2 gestrichen und also in dem Faktor des zweiten Integrals s^2 mit k_1^2 identifiziert werden kann, so ergibt sich endlich hierfür nach (II, 1):

$$-2iBk_2\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty \frac{J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}z}}{N}\lambda\, d\lambda = -2iBk_2\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\Phi$$

Ebenso ist in der Gleichung (8c)

$$\int_0^\infty \frac{J(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}z}\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}+\sqrt{\lambda^2-k_2^2}} = \frac{1}{k_2^2-k_1^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{e^{ik_1R}}{R}+\sqrt{s^2-k_2^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ik_1R}}{R}\right\}$$

zu setzen, wie ebenfalls eine leichte Umrechnung ergibt.

Damit schreiben sich dann die Formeln (8a) und (8c) folgendermaßen:

$$\Pi_{1z} = -2aA\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ik_1R}}{R}+2k_2^2A\cdot\Phi-2iBk_2\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\Phi\ldots \quad (9a)$$

$$\Pi_{1r} = 2aB\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ik_1R}}{R}-\frac{2B}{k_2^2-k_1^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{e^{ik_1R}}{R}+\sqrt{s^2-k_2^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ik_1R}}{R}\right\} \quad (9b)$$

Der Term $-2aA\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ik_1R}}{R}$ im Ausdrucke für Π_{1z}, der ohnehin in der Nähe von $z=0$ ohne Bedeutung ist, ist nur dadurch entstanden, daß wir die Vertikalantenne als Dipol in einem gewissen Abstande von der Erde betrachtet haben, was aus rein mathematischen Rücksichten geboten war. Wenn wir jetzt diesen Abstand unendlich klein werden lassen, so entspricht das durchaus dem Problem, und wir können diesen Term ohne weiteres fortlassen, wenigstens so lange es sich um größere Entfernungen handelt. Nach diesen Vernachlässigungen reduzieren sich die Ausdrücke der Gleichung (9) für $B=0$ und

$2 k_2^2 A = 1$ (axial symmetrische Erregung von einer gewissen Einheitsstärke) auf die schon von Sommerfeld angegebene Lösung, seine Gleichung (14), wie es sein muß. Wenn man den im zweiten Teil entwickelten expliziten Ausdruck für die Funktion Φ einführt, so vereinfachen sich die obigen Formeln noch weiter.

Es ist nämlich nach (II, 23), wenn man die dort vorkommende Klammergröße mit $f(r)$ bezeichnet:

$$\Phi = \frac{-i k_1^2 k_2^2}{(k_1^4 - k_2^4)\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} f(r)\, e^{-\sqrt{s^2 - k_1^2}\, z}$$

wobei $f(r)$ verschieden zu berechnen ist, je nachdem ob die von Sommerfeld[1]) eingeführte „numerische Entfernung", d. h. der Wert von $\alpha^2 = i(k_1 - s)r$, den wir in erster Näherung auch durch

$$\alpha^2 = \frac{i k_1 r}{2} \frac{k_1^2}{k_2^2}$$

ersetzen können, eine große oder kleine Zahl ist. Nach (II, 23) ist in erster Näherung:

$$f(r) = e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{2\pi} \frac{e^{isr}}{\sqrt{sr}} - \frac{e^{ik_1 r}}{2 r \alpha^2 \sqrt{s^2 - k_1^2}} \qquad \alpha^2 > 5$$

$$f(r) = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{2} \sqrt{2\pi} \frac{e^{isr}}{\sqrt{sr}} + \frac{e^{ik_1 r}}{\sqrt{s^2 - k_1^2}\, r} \left\{ 1 - \frac{2}{1} \alpha^2 + \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \alpha^4 \ldots \right\} \alpha^2 < 5$$

Der hier vorkommende Wert von $\sqrt{s^2 - k_1^2}$ ist näherungsweise durch $i k_1 \frac{k_1}{k_2}$ zu ersetzen.

Wir sehen aus diesen Formeln, daß in Gleichung (9a) bei der Differentiation von $f(r)$ nach r nur die durch Differentiation der Exponentialfunktionen entstehenden Terme von wesentlichem Belang sind. Streng genommen ist dabei

$$\frac{d}{dr} e^{isr} = is \cdot e^{isr}$$

und

$$\frac{d}{dr} e^{ik_1 r} = ik_1 \cdot e^{ik_1 r}$$

---

1) l. c. S. 708.

da sich aber k_1 und s unter unseren Voraussetzungen nur sehr wenig voneinander unterscheiden, so sind wir berechtigt, sie einander gleichzusetzen, solange sie nur als Faktoren vorkommen. Wir erhalten so:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = i k_1 \Phi \tag{10}$$

Wenn wir alle diese Umstände berücksichtigen, so vereinfacht sich Π_z zu:

$$\Pi_{1z} = 2 k_2 \Phi \{ A k_2 + B k_1 \cos \varphi \} \tag{10a}$$

Für $z = 0$ vereinfacht sich auch Π_x wesentlich, und zwar ist:

$$\Pi_{1x} = - 2 i k_1 B \frac{k_1^2}{k_2^2} \frac{e^{i k_1 r}}{(k_1 r)^2} \qquad z = 0 \tag{11}$$

wenn k_1^2 gegen k_2^2 gestrichen wird.

Aus diesen Ausdrücken ergeben sich nun die Feldstärken ohne weitere Schwierigkeit. Es empfiehlt sich, den Feldstärken ebenfalls das Koordinatensystem $r \varphi z$ zugrunde zu legen, da die Komponenten des Hertzschen Vektors als Funktionen von r und φ gegeben sind.

Dann schreibt sich zunächst $\mathfrak{E}_r$, wie aus dem Vektorcharakter von $\mathfrak{E}$ unmittelbar folgt, folgendermaßen (vgl. S. 11 u. 12):

$$\mathfrak{E}_r = \frac{i n}{c} \left\{ \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right) + \Pi_r \right\} e^{-int}$$

Hier ist nach Gleichung (11):

$$\frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Pi_x}{\partial x} = - \Pi_x \cos \varphi = - \Pi_r$$

und der obige Ausdruck für $\mathfrak{E}_r$ vereinfacht sich zu:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_r &= \frac{i n}{c} \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial r \partial z} e^{-int} \\ &= \frac{i n}{c} 2 \sqrt{s^2 - k_1^2} \frac{k_1}{k_2^2} f(r) \{ A k_2 + B k_1 \cos \varphi \} e^{-int} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die hierzu senkrechte Horizontalkomponente $\mathfrak{E}_\varphi$ ist weiter gegeben durch:

$$\mathfrak{E}_\varphi = \frac{i n}{c} \left\{ \frac{1}{k_1^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right) + \Pi_\varphi \right\} e^{-int}$$

Es zeigt sich hier zunächst, daß für größere Werte von $k_1 r$ und

$\left|\frac{k_2^2}{k_1^2}\right|$ jedenfalls $\frac{\partial \Pi_x}{\partial x}$ gegen $\frac{\partial \Pi_z}{\partial z}$ zu vernachlässigen ist, was nach Gleichung (10) und (II 23) leicht verifiziert werden kann.

Dann erhalten wir aber nach Gleichung (11) und (II 28), da $\Pi_\varphi = -\Pi_x \sin\varphi$ ist

$$\mathfrak{E}_\varphi = \frac{in}{c} \cdot 2iB \frac{k_1^2}{k_1^2} \frac{\sqrt{s^2 - k_1^2}}{k_1 r} \left\{ f(r) + \frac{e^{ik_1 r}}{\sqrt{s^2 - k_1^2} r} \right\} \sin\varphi\, e^{-int} \quad (13)$$

Es erübrigt noch $\mathfrak{E}_z$ zu berechnen. Es ist

$$\mathfrak{E}_z = \frac{in}{c} \left\{ \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} \right) + \Pi_z \right\} e^{-int}$$

$\frac{\partial \Pi_x}{\partial x}$ können wir nach obigem wieder fortlassen und bemerken außerdem, daß nach Gleichung (10) und (II 23)

$$\frac{1}{k_1^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Pi_z = \frac{s^2 - k_1^2}{k_1^2} \Pi_z \cong \frac{k_1^2}{k_2^2} \Pi_z$$

ebenfalls gegen Π_z selbst vernachlässigt werden darf, so daß wir für $\mathfrak{E}_z$ einfach schreiben können:

$$\mathfrak{E}_z = \frac{in}{c} \cdot 2i \frac{k_1^2}{k_2^2} f(r) \left\{ A k_2 + B k_1 \cos\varphi \right\} e^{-int} \quad (14)$$

Wenn wir zuerst die Komponente $\mathfrak{E}_\varphi$ näher betrachten, so zeigt sich, daß dieselbe mit B verschwindet, wie es sein muß, da im Falle der symmetrischen Wellenausbreitung eine solche Komponente überhaupt nicht vorhanden sein kann.

Wenn wir ferner die Intensität dieser Komponente mit derjenigen von $\mathfrak{E}_r$ vergleichen, so haben wir die Fälle großer und kleiner numerischer Entfernungen gesondert zu untersuchen.

1. Im Falle sehr großer numerischer Entfernung ist $f(r)$ im wesentlichen gegeben durch:

$$f(r) = \frac{ik_2^2}{k_1^2} \frac{1}{k_1 r} \frac{e^{ik_1 r}}{\sqrt{s^2 - k_1^2} r}$$

[Die Entfernung sei also so groß, daß:

$$\sqrt{2\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{isr}}{\sqrt{sr}}$$

wegen der exponentiellen Dämpfung hiergegen zu vernachlässigen ist

(II 23)], und dies kann für große $|k_1 r|$ in Formel (13) gegen $\frac{e^{ik_1 r}}{\sqrt{s^2 - k_1^2} r}$ unterdrückt werden, so daß in diesem Falle

$$\mathfrak{E}_\varphi = \frac{in}{c} 2 i B k_1 \frac{k_1^2}{k_2^2} \sin\varphi \frac{e^{ik_1 r}}{(k_1 r)^2} e^{int}$$

geschrieben werden kann.

Andererseits wird dann $\mathfrak{E}_r$ nach Gleichung (12):

$$\mathfrak{E}_r = \frac{in}{c} 2 i (A k_2 + B k_1 \cos\varphi) \frac{e^{ik_1 r}}{(k_1 r)^2} e^{-int}$$

so daß sich die Intensität von $\mathfrak{E}_\varphi$ zu dem von φ abhängigen Teil von $\mathfrak{E}_r$ verhält wie $k_1^2 : k_2^2$. Hier verschwindet also diese Komponente vollständig gegenüber $\mathfrak{E}_r$.

2. Für sehr kleine numerische Entfernungen ist $f(r)$ nahezu $= \frac{e^{ik_1 r}}{\sqrt{s^2 - k_1^2} r}$, so daß in der Klammer in Formel (13) $2 f(r)$ zu schreiben ist. Dann verhalten sich aber die entsprechenden Intensitäten von $\mathfrak{E}_\varphi$ und $\mathfrak{E}_r$ wie $\frac{2}{k_1 r}$ und für Entfernungen von einigen Wellenlängen spielt $\mathfrak{E}_\varphi$ bereits keine Rolle mehr neben $\mathfrak{E}_r$.

Da mithin neben $\mathfrak{E}_z$ nur noch $\mathfrak{E}_r$ von einiger Bedeutung sein kann, so verlaufen die elektrischen Kraftlinien also auch im Falle der gerichteten Telegraphie im wesentlichen in Meridianebenen.

Wenden wir uns nun zur Betrachtung der radialen Komponente $\mathfrak{E}_r$, so ergibt sich zunächst aus Gleichung (12) und (14), wenn man $\sqrt{s^2 - k_1^2}$ durch $i k_1 \frac{k_1}{k_2}$ ersetzt, daß ihre Intensität zu derjenigen von $\mathfrak{E}_z$ im Verhältnis von $|k_1| : |k_2|$ steht. Im Falle eines trockenen, schlechtleitenden Erdbodens würde also dieses Verhältnis immer noch etwa 1 : 3,5 betragen, so daß hier eine erhebliche Neigung der elektrischen Kraftlinien vorhanden ist und dementsprechend ein starkes Einströmen von Energie in den Erdboden.

Was ferner die Phasenverhältnisse betrifft, so sehen wir, daß $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{E}_z$ sich nur durch den Faktor $\frac{k_1}{k_2}$ voneinander unterscheiden. Da $\frac{k_2^2}{k_1^2} = \varepsilon_2 + 2 i \sigma c l$ ist, wenn σ die in C G S-Einheiten gemessene

Leitfähigkeit und c und l Lichtgeschwindigkeit und Wellenlänge bedeuten, so ergibt sich für die großen Wellenlängen der drahtlosen Telegraphie ein bedeutendes Überwiegen des imaginären Teils in obigem Ausdruck für alle in der Wirklichkeit vorkommenden Fälle. Es ist[1])

Für Seewasser $\quad \frac{k_2^2}{k_1^2} = 80 + i \cdot 12 \cdot 10^4$

Für Süßwasser $\quad \frac{k_2^2}{k_1^2} = 80 + i \cdot 120$

Für nassen Boden $\quad \frac{k_2^2}{k_1^2} = 10 + i \cdot 600$

Für trockenen Boden $\quad \frac{k_2^2}{k_1^2} = 4 + i \cdot 12$

wenn die Wellenlänge zu 2 km angenommen wird. Wenn wir daher $\frac{k_2^2}{k_1^2}$ der Einfachheit halber als rein imaginär ansehen wollen, so ist:

$$\frac{k_1}{k_2} = \left|\frac{k_1}{k_2}\right| e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

das heißt $\mathfrak{E}_r$ bleibt in der Phase um etwa $\frac{\pi}{4}$ gegen $\mathfrak{E}_z$ zurück, so daß die Neigung der elektrischen Feldstärke gegen den Erdboden im Verlaufe einer Schwingung merklich veränderlich ist. Für trockenen Boden erhalten wir für den Vektor $\mathfrak{E}$ das Bild der Fig. 3.

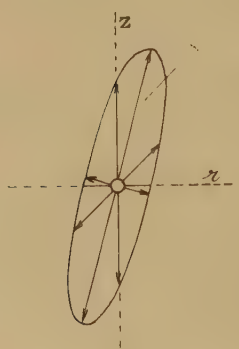


Fig. 3.

Hierzu kommt dann noch die durch $\mathfrak{E}_\varphi$ gegebene geringfügige Pendelung des Vektors $\mathfrak{E}$ in der zur Zeichenebene senkrechten Richtung.

Endlich haben wir uns über die Abhängigkeit der Amplitude vom Winkel φ Rechenschaft abzulegen. Die Art der Abhängigkeit ist für beide Komponenten, wie wir in Gleichung (12) und (14) sahen, die gleiche und wird gegeben durch den Faktor

$$(A k_2 + B k_1 \cos\varphi) = B k_1 \left| v e^{i\gamma} + \cos\varphi \right|,$$

wo $v e^{i\gamma} = \frac{A}{B} \cdot \frac{k_2}{k_1}$ ist.

Hier bedeutet $\frac{A}{B}$ das Verhältnis der beiden Äste der Antenne. Der

1) Vgl. Sommerfeld, l. c. S. 721.

Richtungseffekt ist also um so geringer, je größer dies Verhältnis ist und je größer unter sonst gleichen Umständen Leitfähigkeit des zweiten Mediums oder Wellenlänge sind.

Wenn wir wieder $\frac{k_2^2}{k_1^2} = i \cdot 2\sigma c l$ setzen wollen, das heißt den Einfluß der Dielektrizitätskonstante vernächlässigen, so haben wir für $\frac{k_2}{k_1}$ zu schreiben:

$$\frac{k_2}{k_1} = \sqrt{2\sigma c l}\, e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad \text{also} \quad \gamma = \frac{\pi}{4}$$

Tragen wir dies in unsere obige Formel ein, so erhalten wir als für den Richtungseffekt maßgebenden Faktor:

$$\left| \cos\frac{\pi}{4} \cdot v + \cos\varphi + i \sin\frac{\pi}{4} v \right|$$

Für die Intensität ist das Quadrat dieser Größe bestimmend, d. h. der Wert $v^2 + \sqrt{2}\, v \cos\varphi + \cos^2\varphi = R^2$.

Faßt man R und φ als Polarkoordinaten auf, so ist R nach Größe und Richtung proportional der Amplitude. Zur besseren Orientierung sollen einige solche „Charakteristiken“ am Schlusse dieses Paragraphen angeführt werden. Dabei soll das Verhältnis $\frac{A}{B}$ zu $\frac{1}{5}$ angenommen sein, was den wirklichen Verhältnissen der Marconischen Anordnung entspricht.

Wir bilden noch die Ableitung $\frac{\partial R^2}{\partial \varphi}$. Überall dort, wo dieser Wert verschwindet, steht die Tangente an die Kurve senkrecht zum Fahrstrahl. Es ist

$$\frac{\partial R^2}{\partial \varphi} = -\sin\varphi \left\{ \sqrt{2} \cdot v + 2\cos\varphi \right\}$$

Außer bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ haben wir also noch bei $\cos\varphi = -\frac{v}{\sqrt{2}}$ solche charakteristische Punkte, solange $|v| < \sqrt{2}$ ist. An diesen Stellen ist $\frac{\partial^2 R^2}{\partial \varphi^2} = 2\sin^2\varphi$ stets positiv, d. h. wir haben hier Minima der Intensität vor uns, während für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ Maxima vorliegen. Ferner läßt sich in einfacher Weise der Wert von v berechnen, bei dem das Verhältnis der Intensitäten in den beiden Haupt-

richtungen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ ein Minimum wird, das heißt das Verhältnis:

$$\frac{v^2 - \sqrt{2}\,v + 1}{v^2 + \sqrt{2}\,v + 1}$$

Es zeigt sich, daß bei $v = 1$ dies Verhältnis seinen Minimalwert, nämlich $(\sqrt{2} - 1)^2 = \frac{1}{6}$ erreicht. Für $v = 0$ haben wir also gar keinen Richtungsunterschied nach $\pm x$, bei wachsendem v verstärkt sich der Richtungseffekt bis zu einem Maximum, das für $v = 1$ erreicht wird, wobei zugleich zwei charakteristische Intensitätsminima auftreten. Bei $v = \sqrt{2}$ verschwinden dieselben wieder, zugleich wird der Richtungseffekt schwächer, die Gestalt der Kurve nähert sich derjenigen eines einzigen Kreises, um endlich ganz in einen solchen überzugehen, wenn $v = \infty$ d. h. $\frac{B}{A} = 0$ ist (symmetrischer Sender). Dabei ist indessen immer zu bedenken, daß unsere Formeln nur unter der Annahme größerer Leitfähigkeiten annähernd richtig sind, so daß sehr kleine Werte von v nur durch Verkleinerung von l oder $\frac{B}{A}$ zu erreichen sind, während bei kleinen Leitfähigkeiten die Verhältnisse doch wesentlich anders liegen können.

Es muß ferner noch bemerkt werden, daß auch für sehr kleine Werte von v, wo kein wesentlicher Richtungseffekt in der Hauptrichtung mehr vorhanden ist, immerhin noch eine erhebliche Ersparnis an Energie dadurch erzielt wird, daß der Energiestrom nach den Seiten hin sehr klein ist.

In der Abhängigkeit des Richtungseffektes von

$$v = \frac{A}{B}\left|\sqrt{\varepsilon_2 + 2\,i\,\sigma\,c\,l}\right|$$

liegt ein (annähernd gültiges) Ähnlichkeitsgesetz der gerichteten drahtlosen Telegraphie.

Die Kurven beziehen sich auf folgende Fälle:

1. Grenzfall $v = 0$, d. h. $\frac{A}{B}$ oder l sehr klein.
2. $v = 0{,}25$.
3. $v = 0{,}715$. Also z. B. $\sigma_{\text{magn}} = 10^{-15}$, $l = 2\,km$, $\frac{A}{B} = \frac{1}{5}$.

Dies entspricht nach den erwähnten Zenneckschen Daten einem trockenen, schlechtleitenden Erdboden.

4. Maximaler Richtungseffekt $v = 1$.

5. Verschwindende Minima $v = \sqrt{2}$.

6. $v = 5$. Also z. B. $\sigma_{\text{magn}} = 5 \cdot 10^{-14}$, $l = 2\,km$, $\frac{A}{B} = \frac{1}{5}$.

7. $v = \infty$, das heißt sehr große Leitfähigkeit. Dies entspricht etwa dem Seewasser.

In der Fig. 4 ist noch eine punktierte Kurve (M) eingezeichnet. Diese repräsentiert ein von Marconi tatsächlich aufgenommenes Dia-

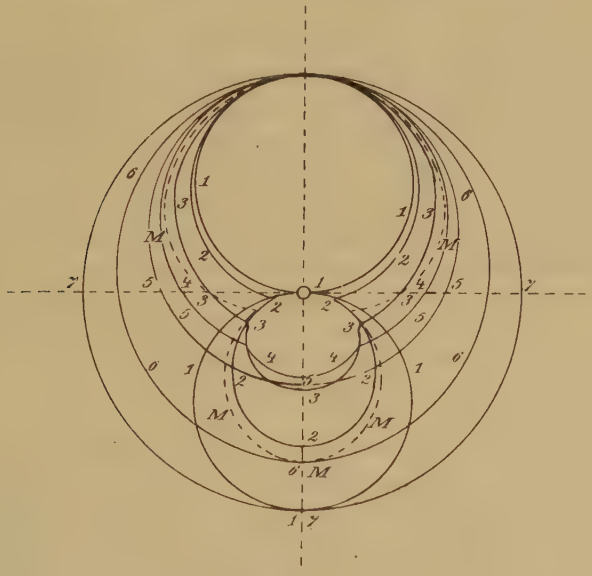


Fig. 4.

gramm.[1]) Wie wir sehen, ist die Übereinstimmung mit den theoretischen Kurven eine verhältnismäßig gute. Die Kurve liegt derjenigen für $v = 0{,}25$ sehr nahe und bei Kenntnis der Wellenlänge ließe sich auf einen bestimmten Wert von $\frac{k_2^2}{k_1^2}$ schließen.

Die geringe Abweichung von der theoretischen Kurve erklärt sich leicht, wenn wir bedenken, daß in Wirklichkeit die horizontale Antennen-

1) Zenneck, l. c. S. 317.

länge durchaus nicht klein gegen die Wellenlänge ist, sondern bei Marconi etwa $^1/_5\ l$ beträgt, während wir dieselbe im Verhältnis zu l (nicht zu A) ganz vernachlässigt haben. Da die wirklichen Diagramme zudem in der Entfernung von nur einer Wellenlänge aufgenommen sind, so müssen sich natürlich gewisse Abweichungen zeigen, die durch Mitberücksichtigung der endlichen Antennenlänge auch theoretisch ihre Aufklärung finden dürften.

§ 3. Die Fernübertragung des Richtungseffektes durch einen umgebenden guten Leiter.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß der Richtungseffekt mit wachsender Leitfähigkeit des Erdbodens sehr schnell verschwindet. Sobald $\sqrt{\sigma c l}$ eine so große Zahl ist, daß sie gegen ihr Quadrat vernachlässigt werden kann, ist von einer Richtung nicht mehr die Rede. Speziell im Falle des Seewassers, wo $\sigma c l$ nach den von Sommerfeld benutzten Zenneckschen Daten etwa den Wert 350 hat, würde nach unserer bisherigen Theorie eine Richtung des Energieflusses vollkommen ausgeschlossen sein. Tatsächlich wird aber eine solche beobachtet. Marconi hat ja gerade über Seewasser mit seinem System den größten Erfolg gehabt. Zur Erklärung dieser merkwürdigen Tatsache reichen unsere bisherigen Betrachtungen offenbar nicht aus, und wir sind gezwungen, genauer auf die physikalischen Vorgänge einzugehen.

Die Formeln (8) zeigten, daß die Z-Komponente des Hertzschen Vektor einen von φ abhängigen Term enthält, der lediglich auf das Vorhandensein einer primären Erregung in der X-Richtung zurückzuführen ist. Wir sahen auch, daß wenigstens in der Nähe des Erdbodens, auf die es ja schließlich ankommt, diese Z-Komponente der Erregung für die Feldstärken eigentlich allein maßgebend ist und daß die aus der X-Komponente des Hertzschen Vektors resultierenden Feldstärken dagegen von gar keiner Bedeutung sind. Diese merkwürdige Umwandlung eines im wesentlichen horizontal verlaufenden Schwingungsvorganges in einen solchen von vertikaler Orientierung, müssen wir nun näher ins Auge fassen. Wir können dabei jetzt den horizontalen Dipol und seine Wirkungen für sich allein betrachten und schreiben die entsprechenden Ausdrücke noch einmal an:

$$\Pi_{1z} = 2B(k_2^2 - k_1^2)\cos\varphi \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z+a)}}{(\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_2^2})N} \lambda^2 d\lambda$$

$$\Pi_{2z} = 2B(k_2^2 - k_1^2)\cos\varphi \int_0^\infty \frac{J_1(\lambda r)\, e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}z - \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}a}}{(\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_2^2})N} \lambda^2 d\lambda \qquad (16)$$

$$\Pi_{2x} = -2B \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}z - \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}a}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda\, d\lambda$$

Dabei ist das Auftreten von Π_z durchaus an mittlere Leitfähigkeiten gebunden, es verschwindet, wie wir gesehen haben, für sehr kleine ebenso wie für sehr große Werte derselben.

Andererseits ist nun aber ein jeder Hertzscher Vektor an einer Stelle des Raumes immer das Ergebnis der von irgendwelchen stromdurchflossenen Volumelementen ausgehenden Erregungen, und zwar gilt dies von seinen Komponenten einzeln. Soll also Π_z überhaupt vorhanden sein, so müssen auch Ströme in der Z-Richtung fließen, aus denen es sich herleiten läßt. Man hat ja[1]) den allgemeinen Ausdruck:

$$\Pi_z = \frac{1}{c}\int \frac{dv}{r}\, \mathfrak{i}_z \left(t - \frac{r}{c}\right)$$

wo $\mathfrak{i}_z$ den Strom des betrachteten Volumelements in der Z-Richtung im Momente: $t - \frac{r}{c}$ bedeutet und die Integration über alle stromdurchflossenen Volumelemente auszudehnen ist. Der Strom kann dabei Konvektivstrom oder dielektrischer Polarisationsstrom sein.

In unserem Falle sind aber die Ströme allein an der Oberfläche und im Innern der Erde zu suchen, und von hieraus ist es vollkommen erklärlich, daß im Falle des reinen Äthers, sowie des unendlich guten Leiters Π_z verschwinden muß, da keine Ströme in das Innere eindringen können.

Für mittlere Leitfähigkeiten aber werden die Konvektivströme, auf die es bei den von uns betrachteten Verhältnissen ja im wesentlichen ankommt, infolge des großen Skineffektes zwar auch nicht sehr tief eindringen können, aber es spielt sich in der obersten Erdschicht

1) Abraham, Theorie der Elektrizität II, S. 58.

doch ein ausgesprochener Schwingungsvorgang von vertikaler Orientierung ab, der im oberen Halbraum die für den Richtungseffekt so wesentliche Komponente Π_z erzeugt. Diese vertikalen Erdströme sind also von hervorragender Bedeutung. Die Formeln (16) zeigen nun unmittelbar, daß bei $r = 0$ $\mathfrak{E}_z$ im zweiten Medium ebenfalls $= 0$ sein muß, denn da für $\mathfrak{E}_z$ die Werte (vgl. S. 12 u. 17) von Π_z, $\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2}$ und $\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial x \partial z}$ in Frage kommen, so enthalten alle Terme im Integranden die Funktion: $J_1(\lambda r)$ und diese ist $= 0$ für $r = 0$ (dieser Umstand genügt, da alle drei Integrale im zweiten Medium ja unbedingt konvergent sind).

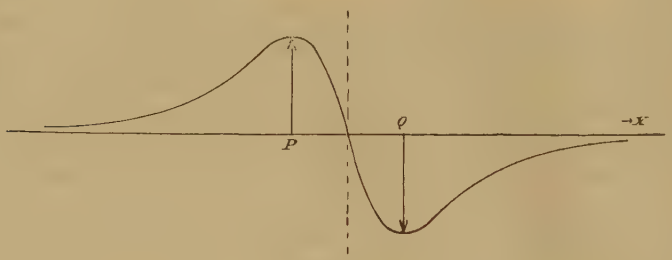


Fig. 5.

Außer für $r = 0$ verschwindet $\mathfrak{E}_z$ für $r = \infty$, muß mithin an einer Stelle $0 < r < \infty$ ein Maximum haben, und da alles mit $\cos\varphi$ multipliziert ist, so erhalten wir für $|\mathfrak{E}_z|$ etwa das folgende Bild, wenn wir das Verhalten von $\mathfrak{E}_z$ auf der X-Achse und die Phasendifferenz der rechten und linken Hälfte illustrieren wollen.

Nehmen wir nun einmal an, das Maximum wäre sehr scharf ausgeprägt und der Abstand der ausgezeichneten Stellen P und Q wäre klein gegen die Wellenlänge, dann würde die Wirkung der beiden Schwingungsvorgänge in P und Q auf einen entfernten Punkt sich angenähert darstellen lassen durch:

$$C \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ik_1 R}}{R} \cdot (PQ) = C \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ik_1 R}}{R} (PQ)$$

wo C von der Intensität des Erdstromes abhängt und (PQ) den Abstand der beiden Punkte bedeutet. Diese in der Nähe des Senders sich ausbildende Welle würde dann weiterhin durch die Einwirkung der Erdoberfläche in ähnlicher Weise abgeändert werden, wie die einfache symmetrische Welle der vertikalen Antenne.

Diese Vermutung wird nun durch das Verhalten von Π_z durchaus bestätigt.

Es ist nämlich nach § 2, S. 21:

$$\Pi_{1z} = -2iBk_2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z}}{N} \lambda\, d\lambda \qquad (17)$$

Vergleichen wir hiermit die von der einfachen vertikalen Antenne ausgesandte Welle, so hat letztere die Form:

$$\Pi_{z\,\mathrm{symm}} = 2Ak_2^2 \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z}}{N} \lambda\, d\lambda$$

Würden wir aber zwei solcher Antennen von entgegengesetzter Phase im Abstande d voneinander ($d \ll l$) rechts und links vom Nullpunkt in der Richtung der X-Achse aufstellen, so würde die entsprechende Erregung die Form haben:

$$\Pi_z = -2Adk_2^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, \lambda\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z}}{N} d\lambda$$

(Das negative Zeichen deutet an, daß wir im Anschluß an die vorhergehende Figur die bei negativem x befindliche Antenne mit positiver Phase rechnen wollen.)

Wenn wir dies mit Gleichung (17) vergleichen, so haben wir also das merkwürdige Resultat:

Das von dem in geringer Entfernung über dem Erdboden schwingenden horizontalen Dipol von der Stärke B erzeugte elektromagnetische Feld ist genau das gleiche, wie das von einer einfachen Doppelantenne vom Momente $\left(\frac{iB}{k_2}\right)$ hervorgerufene sein würde.

Im Falle der einfachen Antenne können wir aber (siehe II. Teil) zwischen „Raumwellen“ und „Oberflächenwellen“ unterscheiden. In der Umgebung des Senders herrscht zunächst die einfache „Raumwelle“ $A \frac{e^{ik_1 R}}{R}$ vor, wie sie sich auch im einheitlichen Medium ausbilden würde und erst in größeren Entfernungen fängt die leitende Erdoberfläche an, den Vorgang zu beeinflussen, was sich in dem Hervortreten der „Oberflächenwelle“ äußert.

Unsere auf S. 32 geäußerte Vermutung, daß es sich bei dem

Problem der Richtung im wesentlichen um zwei deutlich unterscheidbare Wirkungen handelt, nämlich einmal um einen eigentümlichen, in der unmittelbaren Umgebung des Senders im Erdinnern sich abspielenden „Erdstromeffekt", der in der automatischen Erzeugung einer Art vertikaler Doppelantenne besteht, und dann um die gewöhnliche Abänderung dieser sekundären „Primärerregung" durch die weiter draußen liegenden Teile der Erdoberfläche, erscheint also vollkommen bestätigt.

Die ursprüngliche Erregung Π_x fällt dabei ganz heraus, sie dient nur zur Erzeugung des „Erdstromeffektes", welcher also als das eigentlich Wesentliche an dem physikalischen Vorgang zu betrachten ist.

Kehren wir nun noch einmal zu der wirklichen Anordnung eines solchen Senders zurück, so ist zu beachten, daß die Stationen — den Fall der Schiffstelegraphie ausgenommen — ja alle zunächst auf festem, mäßig leitendem Boden stehen, und daß die Wellen erst weiter draußen mit sehr viel besser leitenden Medien, wie es z. B. das Seewasser ist, in Berührung kommen. Zur Ausbildung des „Erdstromeffektes" genügt nun aber offenbar ein sehr kleines Gebiet schlechtleitenden Bodens in der unmittelbaren Nähe des Senders, denn wir können annehmen, daß die Vorgänge in nächster Nähe des Senders durch Modifikationen des Bodens sehr weit draußen in erster Näherung nicht wesentlich beeinflußt werden.

Hierbei ist allerdings immer vorausgesetzt, daß der Hebelarm unserer fingierten Doppelantenne sehr klein gegen die Wellenlänge ist, was wir weiter unten noch eingehend bestätigen werden (siehe § 4).

Andererseits wird, wie die Formeln (9a) und (II, 9) zeigen, die von der vertikalen Antenne ausgesandte Welle in unmittelbarer Nähe des Senders von der Leitfähigkeit des Bodens so gut wie gar nicht beeinflußt, sondern diese Welle ist immer gegeben durch:

$$\Pi_{z\,\mathrm{symm}} = 2A\,\frac{e^{ik_1 R}}{R} \tag{18}$$

Hier erscheint also die Beschaffenheit des Bodens in nächster Nähe von gar keiner Bedeutung, und wir brauchen sie daher für die symmetrische Welle auch nicht in Betracht zu ziehen.

Alle diese Umstände zwingen nun aber notwendig zu folgendem Schluß: Will man die Wirkungsweise eines zunächst auf festem Boden stehenden geknickten Senders dem wirklichen physikalischen Vorgang

entsprechend theoretisch annähernd richtig darstellen, so hat man jedenfalls den soeben besprochenen „Erdstromeffekt“ mit in die Senderanordnung einzubeziehen, d. h. man hat als gegeben zu betrachten:

1. Die primäre symmetrische Welle: $A \frac{e^{ik_1 R}}{R} = \Pi_{z\,\mathrm{symm}}$ (19a)

2. Die sekundäre unsymmetrische Welle:

$$-\frac{iB}{k_2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{ik_1 R}}{R} = \Pi_{z\,\mathrm{unsymm}} \qquad (19b)$$

Wenn man sich dann auf die Betrachtung größerer Entfernungen beschränkt, so kann man diese beiden in der Z-Richtung orientierten Schwingungsvorgänge offenbar als von einem Punkte der Trennungsfläche ausgehend ansehen und nun für den unteren Halbraum wieder ein einheitliches Medium von beliebiger anderer Leitfähigkeit einführen. Denn da jetzt nur eine Z-Komponente des Vektorpotentials primär gegeben ist, so hat man das abermalige Entstehen eines neuen „Sekundäreffektes“ in dem jetzt eingeführten neuen dritten Medium — der unseren Ansatz natürlich illusorisch machen würde — nicht mehr zu gewärtigen. Ein solcher kann nur durch eine primär gegebene X-Komponente entstehen. Dieser Umstand ist wichtig, denn nur dadurch rechtfertigt es sich, daß wir auch im Nullpunkt das neue Medium als vorhanden ansehen dürfen: Die Beschaffenheit des Bodens in der Nähe des Senders ist in der Tat belanglos, solange der Vorgang im wesentlichen von vertikalen Schwingungen eingeleitet gedacht wird!

Zu den Formeln (19) ist noch folgendes zu bemerken: Daß wir den Faktor 2 (siehe auch 18) in diesen Formeln fortlassen, ist dadurch begründet, daß derselbe ja nur die Spiegelung an einer gut leitenden Oberfläche bedeutete, und daß wir diese Spiegelung ohnehin wieder erhalten, wenn wir jetzt ein neues drittes Medium betrachten. Wir würden daher ein und denselben Umstand doppelt in Rechnung stellen, wollten wir die an der Oberfläche des den Sender umgebenden Materiales erzeugte Spiegelung für unseren neuen Ansatz berücksichtigen. Wir sahen ja soeben, daß dieselbe von der Leitfähigkeit des Bodens so gut wie gar nicht beeinflußt wird. — Was zuletzt noch die aufgewandte Energie betrifft, so ist dieselbe natürlich nach wie vor durch die Faktoren A und B allein bedingt, denn $\Pi_{z\,\mathrm{unsymm}}$ entsteht in

Wirklichkeit nur auf Kosten der in den eigentlichen Antennen fließenden Ströme.

Mit diesem korrigierten Ansatz wollen wir nun noch einmal die Rechnung des § 1 durchführen. Dieselbe vereinfacht sich jetzt wesentlich, da wir es nur mit einer einzigen Z-Komponente zu tun haben. Das durch $\Pi_{z\,\mathrm{symm}}$ erzeugte Feld kennen wir bereits. Es im wesentlichen (nach 8):

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{1z\,\mathrm{symm}} &= 2Ak_3^2 \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\, z}}{N}\, \lambda\, d\lambda \\ \Pi_{2z\,\mathrm{symm}} &= 2Ak_3^2 \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\, z - \sqrt{\lambda^2-k_1^2}\, a}}{N}\, \lambda\, d\lambda \end{aligned}\right\} \quad (20\,\mathrm{a})$$

wenn k_3^2 sich jetzt auf das neue dritte Medium bezieht. Aber auch das zu $\Pi_{z\,\mathrm{unsymm}}$ gehörige Feld ergibt sich ebenso einfach, denn wir brauchen nur in den obigen Formeln A mit $-\frac{iB}{k_2}$ zu vertauschen und die entstehenden Ausdrücke nach x zu differenzieren. Somit ist:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{1z\,\mathrm{unsymm}} &= -\frac{2iB}{k_2} k_3^2 \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\, z}}{N}\, \lambda\, d\lambda \\ \Pi_{2z\,\mathrm{unsymm}} &= -\frac{2iB}{k_2} k_3^2 \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty \frac{J(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\, z - \sqrt{\lambda^2-k_1^2}\, a}}{N}\, \lambda\, d\lambda \end{aligned}\right\} \quad (20\,\mathrm{b})$$

Berücksichtigt man noch die Formel (10a), so ergibt sich wieder:

$$\Pi_{1z} = \Pi_{1z\,\mathrm{symm}} + \Pi_{1z\,\mathrm{unsymm}} = 2\frac{k_3^2}{k_2}\,(Ak_2 + Bk_1\cos\varphi)\,\Phi_{(k_3)} \qquad (21)$$

Wir haben also das eigentümliche Resultat, daß auch im Falle sehr großer Leitfähigkeiten ein starker Richtungseffekt notwendig vorhanden ist, sobald nur die nächste Umgebung des Senders aus einem anderen Material von mittlerer Leitfähigkeit besteht. Die Art der Abhängigkeit des Energieflusses von der Richtung ist dabei genau dieselbe, wie wenn der ganze Boden aus diesem Material bestände und wird gegeben durch den Faktor:

$$|Ak_2 + Bk_1\cos\varphi|^2$$

Die Leitfähigkeit k_3 geht nur in die Funktion Φ ein, die die Fernleitung bestimmt, sowie in die Größe (aber nicht in die Verteilung) der Amplitude.

Zum Schluß wollen wir uns noch überzeugen, daß eine einfache Vertikalantenne und eine „Doppelantenne" im oben erläuterten Sinne zusammen in der Ebene $z = 0$ tatsächlich den fraglichen Richtungseffekt liefern.

Die Entfernung der beiden Antennen 2 und 3 sei so gering, daß ihre Wirkung nach Phase und Intensität durch einen Ausdruck von der Form:

Fig. 6.

$$-\frac{iB}{k_2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{ik_1R}}{R}$$

wiedergegeben werden kann, während die symmetrische Welle die Form habe:

$$A\frac{e^{ik_1R}}{R}.$$

Die Gesamtwirkung ist also:

$$\left(A - \frac{iB}{k_2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{e^{ik_1R}}{R}$$

Führt man die Differenziation aus, so ist:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{ik_1R}}{R} = \cos\varphi\,\frac{r}{R}\,\frac{ik_1R - 1}{R^2}\,e^{ik_1R}$$

und für $z = 0$, $r = R$ und $k_1 r \gg 1$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{ik_1R}}{R} = ik_1\cos\varphi\,\frac{e^{ik_1R}}{R}$$

Wir erhalten also als Gesamtwirkung:

$$\frac{1}{k_2}\left(Ak_2 + Bk_1\cos\varphi\right)\frac{e^{ik_1R}}{R}$$

d. h. diese idealisierte Anordnung liefert in der Tat den früher berechneten tatsächlichen Richtungseffekt.

§ 4. Die Erdströme.

Im vorigen Paragraphen haben wir die Existenz des dort eingehend besprochenen „Erdstromeffektes“ eigentlich mehr aus dem allgemeinen Bau der Formeln erschlossen, als im einzelnen nachgewiesen. Dies haben wir jetzt noch nachzuholen, wobei sich auch die Größe des Hebelarms unserer fingierten „Doppelantenne“ herausstellen wird.

Zu diesem Zweck betrachten wir die im Erdinnern von dem horizontalen Aste der Antenne hervorgerufenen vertikalen Stromkomponenten. Da es uns jetzt gerade auf die unmittelbare Umgebung des Nullpunktes ankommt, so sind unsere bisherigen Vernachlässigungen nicht mehr statthaft, und wir müssen die vorkommenden Integralausdrücke in anderer Weise entwickeln.

Es empfiehlt sich, den Ausdruck $\mathfrak{E}_{(2)_z}$ zunächst in Integralform anzuschreiben und sich dabei auf die Betrachtung der Erdoberfläche zu beschränken, d. h. $z = 0$ zu setzen. Dann ist $\mathfrak{E}_z$ gegeben durch:

$$\mathfrak{E}_{(2)_z} = \frac{in}{c}\left\{\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Pi_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{2z}}{\partial x}\right) + \Pi_{2z}\right\}$$

und wenn man die drei Ausdrücke an Hand der Formeln (8) unter Fortlassung der symmetrischen Terme einzeln bildet und alles auf einen Nenner reduziert, so ergibt sich

$$\mathfrak{E}_{(2)_z} =$$

$$-2B\frac{in}{c}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty \frac{1}{k_2^2}\frac{\sqrt{\lambda^2-k_2^2}N + \frac{k_2^2-k_1^2}{k_2^2}(\lambda^2-k_2^2)+k_2^2-k_1^2}{(\sqrt{\lambda^2-k_1^2}+\sqrt{\lambda^2-k_2^2})N} J(\lambda r)e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}a}\lambda\,d\lambda$$

Durch Multiplizieren mit $\sqrt{\lambda^2-k_1^2}-\sqrt{\lambda^2-k_2^2}$ in Zähler und Nenner reduziert sich dieser Ausdruck noch wesentlich und nimmt die einfache Form an:

$$\mathfrak{E}_{(2)_z} = -2B\frac{in}{c}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}{N} J(\lambda r)\,e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}a}\,\lambda\,d\lambda$$

$$= -\frac{2B\frac{in}{c}}{k_1^4-k_2^4}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left\{k_1^2\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}{\lambda^2-s^2} J(\lambda r)\,e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}a}\lambda\,d\lambda\right.$$

$$\left. - k_2^2\int_0^\infty \frac{\lambda^2-k_1^2}{\lambda^2-s^2} J(\lambda r)\,e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}a}\,\lambda\,d\lambda\right\}$$

Solange nun $|k_1 r|$ eine kleine Zahl ist, kann auch der geringe Unterschied zwischen 1 und $\frac{s^2}{k_1^2}$ vernachlässigt werden, wie aus den Entwickelungen des Anhanges deutlich hervorgeht, so daß der zweite Term mit:

$$k_2^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ik_1 R}}{R_{(z=a)}}$$

identifiziert werden kann.

Der erste Term ist, wenn k_1^2 mit s^2 identifiziert wird, nach (II, 25) für gewisse größere Werte von $|k_1 R|$ gegeben durch:

$$k_1^2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2} \frac{e^{ik_1 R}}{R} \qquad \left|\frac{k_1^2}{k_2^2}\right| \frac{1}{(k_1 R)^2} \ll 1 \qquad \left|\frac{k_1^2}{k_2^2}\right| \ll 1$$

Da es uns in diesem Paragraphen nur darauf ankommt, das prinzipielle Verhalten der Erdströme aufzuzeigen, so wählen wir den einfachsten Fall, daß $\left|\frac{k_2^2}{k_1^2}\right|$ eine große Zahl sei. Dann wird $\mathfrak{E}_z$ bis zu einem gewissen nicht zu überschreitenden Minimum von $|k_1 R|$ gegeben durch:

$$\mathfrak{E}_{(2)z} = \frac{2B\frac{in}{c}}{k_2^3} \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left\{k_2 \frac{\partial}{\partial z} - i k_1^2\right\} \frac{e^{ik_1 R}}{R_{z=a}}$$

Mit abnehmendem $|k_1 R|$ verschwindet der zweite Term der Klammer gegen den ersten. Andererseits folgt aus (II, 26), daß für sehr kleine $|k_1 R|$ dieser Term durch

$$-\frac{k_1}{k_2} k_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ik_1 R}}{R}$$

zu ersetzen und also ebenfalls gegen den ersten zu streichen wäre.

Unsere obige Formel wird also auch für beliebig kleine $|k_1 R|$ annähernd richtig sein, und wir dürfen annehmen, daß sie die Verhältnisse für alle Werte von $k_1 R$ zutreffend wiedergibt. Führen wir die Differentiationen aus, so ergibt sich:

$$\mathfrak{E}_{(2)z} = \frac{2B\frac{in}{c}}{k_2^3} \cos\varphi \frac{e^{ik_1 R}}{R^5}\left\{(k_1 R)^3 - (\alpha k_2 + i)(k_1 R)^2 - 3i\alpha k_2 k_1 R + 3\alpha k_2\right\} r \quad (22\,a)$$

Es sind also vier Wellenzüge von verschiedenem Typus vorhanden. Der Richtungseffekt ist nun aber von der Höhe a wesentlich unab-

hängig, wenn diese nur klein gegen die Wellenlänge ist. Daher sind wir berechtigt, der Untersuchung den Fall eines verschwindenden Wertes von a zugrunde zu legen, da außerdem für unsere jetzige Betrachtung R von der Größenordnung von a ist. Das hat den großen Vorteil, daß in diesem Falle in der Nähe des Nullpunktes nur das letzte Glied der obigen Klammer von Belang ist und daß e^{ik_1R} für das wesentlich in Frage kommende Gebiet durch 1 ersetzt werden kann. Dann erhalten wir also als wichtigsten Bestandteil der Erdströme:

$$\mathfrak{E}_{(2)z} = \frac{in}{c} 6 B k_1 a k_1 \frac{k_1^2}{k_1^2} \cos\varphi \frac{k_1 r}{(k_1 R)^5} \cdot e^{-int} \qquad (22\,\mathrm{b})$$

Schreibt man

$$\frac{k_1 r}{(k_1 R)^5} = \frac{1}{(a k_1)^4} \cdot \frac{\frac{r}{a}}{\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{5/2}}$$

und berechnet das Maximum dieses Ausdrucks, so ergibt es sich bei:

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{2}$$

Es gibt also zwei ausgezeichnete Punkte auf der X-Achse zu beiden Seiten des Dipols, in denen die Intensität der Erdströme ihr absolutes Maximum erreicht. Die entsprechenden Maxima auf den einzelnen Radienvektoren liegen auf einem Kreise vom Radius $\frac{a}{2}$.

Wenn man sich die Wirkung der Ströme annähernd in einem Punkt konzentriert denken will, so wäre hierfür der Punkt $x = \pm \frac{a}{2}$ zu wählen. Der Hebelarm unserer fingierten Doppelantenne ist also etwa gleich der Höhe des Dipols über dem Erdboden.

Wenn wir zur Stromstärke übergehen, auf die es letzten Endes ankommt, so haben wir $\mathfrak{E}_z$ mit σ zu multiplizieren. Wenn wir uns auf den Fall großer Leitfähigkeit beschränken, so ist

$$\sigma_2 = -in \frac{k_2^2}{k_1^2}$$

und wir erhalten aus Gleichung (22b) für die Stromstärke

$$i_z = 6\,c\,B\cos\varphi\,\frac{1}{a^3}\,\frac{\frac{r}{a}}{\left(\sqrt{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2}\right)^5}\,e^{-int} \qquad (23)$$

Die Stromstärke in unserer fingierten Doppelantenne wächst also mit der reziproken dritten Potenz der Höhe des Dipols über dem Boden.

Durch die Fig. 7 soll noch der Verlauf der Stromamplituden, wie er sich nach Gleichung (23) für $a\,k_1 = \frac{1}{3}$ darstellt, was den Verhältnissen bei Marconi entspricht, veranschaulicht werden.

Wie man sieht, ist das Maximum ein sehr ausgesprochenes.

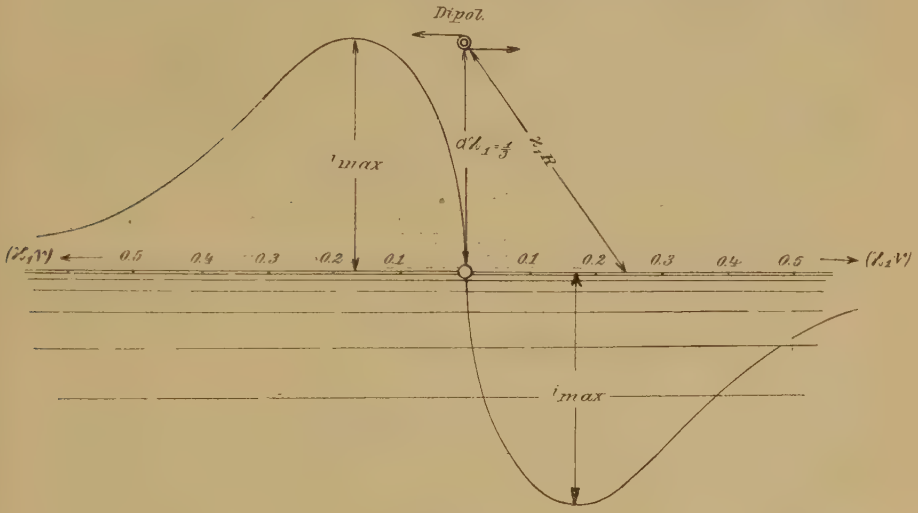


Fig. 7.

Zum Schlusse wollen wir noch die Erdströme berechnen, die der vertikal schwingende Dipol induziert. Die Feldstärken sind hier (s. Gleichung 8b) gegeben durch:

$$\mathfrak{E}_{(2)\,z\,\mathrm{symm}} = \frac{i\,n}{c}\left\{2A\int_0^\infty \frac{\lambda^2 - k_2^2}{N}\,J(\lambda r)\,e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\,a}\,\lambda\,d\lambda + \right.$$

$$\left. + 2A\,k_2^2\int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\,e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\,a}}{N}\,\lambda\,d\lambda\right\} e^{-int}$$

$$\mathfrak{E}_{(2)\,z\,\mathrm{symm}} = \frac{in}{c}\,\frac{2A}{k_1^4 - k_2^4}\left\{k_1^2\int_0^\infty \frac{\lambda^2\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\lambda^2 - s^2}\,J(\lambda r)\,e^{-|\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}|a}\,\lambda\,d\lambda - \right.$$

$$\left. - k_2^2\int_0^\infty \frac{\lambda^2\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}{\lambda^2 - s^2}\,J(\lambda r)\,e^{-|\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}|a}\,\lambda\,d\lambda\right\} e^{-int}$$

Wenn wir wieder sehr kleine Werte von $a k_1$ und die unmittelbare Umgebung des Nullpunktes betrachten, so läßt sich mit Hilfe der bereits mehrfach benützten Überlegungen leicht zeigen, daß nur der zweite Term der obigen Klammer von Belang ist. Identifiziert man dann noch k_1^2 mit s^2 und schreibt: $\lambda^2 = \lambda^2 - k_1^2 + k_1^2$, so ergibt sich:

$$\mathfrak{E}_{(2)\,z\,\mathrm{symm}} = -\frac{in}{c}\,\frac{2Ak_2^2}{k_1^4 - k_2^4}\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\frac{e^{ik_1 R}}{R}\Big|_{z=a} + k_1^2\frac{e^{ik_1 R}}{R}\right\}$$

wo für sehr kleine $k_1 R$ auch noch der zweite Term gestrichen werden kann. Führt man die Differentiation aus und streicht k_1^4 gegen k_2^2, so wird:

$$\mathfrak{E}_{(2)\,z\,\mathrm{symm}} = -\frac{in}{c}\,\frac{2A}{k_2^2}\,\frac{1 + \dfrac{a}{R}}{R^3}\,e^{-int} \quad |k_1 R| \ll 1$$

Also erhält man für die Stromstärke:

$$\mathfrak{i}_{z\,\mathrm{symm}} = -2cA\,\frac{1 + \dfrac{a}{R}}{R^3}\,e^{-int}$$

Die maximale Stromstärke (im Nullpunkt: $R = a$) wächst also auch hier mit der reziproken dritten Potenz der Höhe des Dipols über dem Boden.

Es ist daher einleuchtend, daß der Art der Erdung der Antennen eine große Bedeutung für den Wirkungsgrad der Anordnung zukommen muß. Über den Einfluß der Erdung können wir aber selbstverständlich nichts Näheres aussagen, solange die endlichen Dimensionen der Antenne nicht berücksichtigt werden.

§ 5. Berechnung des Erdstromeffektes aus der Verteilung der Erdströme.

Jetzt haben wir nur noch einen letzten Schritt zu tun, um den vollen Anschluß an die Resultate des § 3 zu gewinnen. Dort hatte sich herausgestellt, daß die Wirkung der Erdströme darin bestehen muß, daß sich in der Erde eine Art vertikaler Doppelantenne von bestimmtem Momente herausbildet. Dies Moment würde (s. S. 33) den Wert $\left|\frac{iB}{k_2}\right|$ haben, wenn diese fingierte Doppelantenne sich über dem Boden befände und die von ihr ausgesandte Welle sich an der Oberfläche spiegeln könnte; fällt diese Spiegelung fort, d. h. betrachtet man, wie wir es jetzt tun müssen, die Erdoberfläche selbst als einzigen ursprünglichen Erreger des Feldes, so muß diese Spiegelung offenbar von vornherein als zur primären Wirkung der Erde gehörig betrachtet werden, d. h. es ist für das fragliche Moment nach den Erläuterungen auf S. 33 der Wert $\left|\frac{2iB}{k_2}\right|$ zu erwarten.

Soll also die bisher entwickelte Theorie des „Erdstromeffektes" richtig sein, so muß als Wirkung der eingehend besprochenen Erdströme auf einen entfernteren Punkt im ersten Medium, sich wenigstens annähernd der Ausdruck ergeben:

$$\Pi_z = -\frac{2iB}{k_2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{i(k_1 R - nt)}}{R} \tag{24}$$

Das ist nun tatsächlich der Fall. Bis auf eine leicht erklärliche Unsicherheit im Zahlenfaktor bewirken die Erdströme eine Erregung, die mit $\frac{B}{k_2}$ proportional ist und auch bezüglich der Phase mit obigem Ausdruck übereinstimmt.

Um nämlich die aus irgendwelchen vorhandenen periodischen Konvektivströmen, die im Äther eingebettet gedacht sind, den resultierenden Hertzschen Vektor in einem gegebenen Aufpunkte zu erhalten, hat man bekanntlich den Ausdruck zu bilden:[1])

$$\Pi = \frac{e^{-int}}{c}\int_{(v)} dv\, i_v \frac{e^{ik_1 R_v}}{R_v} \tag{25}$$

1) S. Abraham l. c.

wo $i_r e^{int}$ die Stromstärke eines Volumelementes und R_r den Abstand des Aufpunktes von diesem Volumelement bedeutet und die Integration über alle in Frage kommenden Volumelemente auszudehnen ist. Streng genommen, hätten wir also in diesem Ausdruck alle in naher und beliebig weiter Entfernung vom Sender in der Erde auftretenden Ströme exakt zu berücksichtigen und da R_r ebenfalls von der Lage des betrachteten Volumelements abhängt, so würde der obige Ausdruck im allgemeinen zu kompliziert sein, als daß er genauer berechnet werden könnte.

Nun hatten wir aber schon in § 3 von allen vorhandenen Erdströmen einen in der Nähe des Senders besonders hervortretenden Bestandteil abgelöst und von diesem wieder im § 4 den in allernächster Nachbarschaft des Senders ganz ausgesprochen überwiegenden. Derselbe ergab sich dadurch, daß in Formel (22a) nur das letzte Glied der Klammer berücksichtigt wurde. Es liegt nahe, anzunehmen, daß dieser Teil der Erdströme im wesentlichen für das Auftreten einer Erregung von der Form (24) verantwortlich ist.

Dieser besondere Bestandteil der Erdströme hat nun weiter die Eigentümlichkeit, daß er radial sehr stark abgedämpft ist. Wir sehen aus Fig. 7, daß seine Wirkungssphäre sich kaum weiter als bis $r = \frac{3}{2} a$ erstreckt.

In erster Näherung kann daher in Gleichung (25) R_r für einen entfernteren Aufpunkt als konstant angesehen werden, wenn nur die Wirkung dieses engeren Gebietes beachtet werden soll. Es ist dabei einmal über die fragliche Oberfläche zu integrieren und sodann die Veränderlichkeit der Ströme in vertikaler Richtung zu berücksichtigen. Diese letztere Abhängigkeit von der Tiefe z ist nun aber eine sehr einfache und durch $i_{z=0}(r, \varphi) \cdot e^{-ik_2 z}$ gegeben, wie sich ohne weiteres zeigt, wenn man in dem allgemeinen Integralausdruck für $\mathfrak{E}_z$ zuerst unter dem Integral nach z differenziert und dann dieselbe Vereinfachung an dem Ausdruck für $\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}$ vornimmt, wie sie bereits für $\mathfrak{E}_z$ selbst eingehend begründet wurde. Es zeigt sich dann, daß $\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z_{z=0}}$ den Wert hat:

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathfrak{E}_z = -i k_2 \mathfrak{E}_z$$

Da diese Abnahme eine sehr starke ist bei größeren Leitfähig-

keiten, die wir hier ja voraussetzen, so kommt es nur auf die oberste Schicht des Bodens an, so daß der Ansatz:

$$i_z = i_{z=0} \cdot e^{-ik_2 z}$$

vollkommen gerechtfertigt ist und wegen desselben Umstandes kann dann auch die Integration nach z ohne weiteres bis $z = \infty$ ausgedehnt werden, da in größeren Tiefen, wo R_v nicht mehr als konstant betrachtet werden dürfte, die Beiträge zu dem Integral verschwindend gering sind. Es ist aber

$$\int_0^\infty e^{-ik_2 z}\, dz = \frac{i}{k_2}$$

und mit diesem Wert haben wir den sich aus der Integration über die Oberfläche ergebenden Ausdruck nachträglich zu multiplizieren.

Diese Integration über die Oberfläche gestaltet sich nun ebenso einfach.

Wir haben zu setzen nach Gleichung (23):

$$i_v = 6\, c\, B \cos\varphi \frac{1}{a^3} \frac{a^5}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}\right)^5}$$

und das Oberflächenelement ist gegeben durch

$$do = r\, d\varphi\, dr = a^2 \frac{r}{a} d\left(\frac{r}{a}\right) d\varphi$$

Hierbei ist also angenommen, daß $|a k_1|$ und also auch $|k_1 R|$ (das mit R_v nicht zu verwechseln ist!) so gering sein sollen, daß der in Formel (22a) stehende Faktor $e^{ik_1 R}$ in erster Näherung unberücksichtigt bleiben kann. Die Integration läuft von $\frac{r}{a} = 0$ bis $\frac{r}{a} = {}^3/_2$, wenn wir uns auf diese nächste Umgebung beschränken, und von

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ bis } \varphi = +\frac{\pi}{2}$$

Nach diesen Voraussetzungen wird das Integral (25):

$$\Pi_z = \frac{6\, B\, i \cos\varphi}{a\, k_2} \frac{e^{ik_1 R}}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2\, dx}{(\sqrt{1+x^2})^5} e^{-i n t}$$

Die Integration nach φ liefert den Faktor 2 und diejenige nach X den Faktor: 0,19[1]) so daß im ganzen für die eine Hälfte des Bodens:

$$\Pi_z = 2{,}3\,\frac{B\,i}{k_2}\,\frac{1}{a}\,\frac{e^{i k_1 R}}{R}\,e^{-int}$$

wird.

Auf der anderen Seite vom Sender ist die Phase die entgegengesetzte, und wenn man als mittleren Hebelarm die Entfernung der beiden Strommaxima ansehen will, so ist derselbe $= a$ zu setzen. Damit wird dann schließlich die Wirkung dieses Teils der Erdströme auf einen entfernteren Punkt ausgedrückt durch:

$$\Pi_z = -\frac{2{,}3\,i B}{k_2}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{e^{i(k_1 R - n t)}}{R} \tag{26}$$

und dies ist bis auf eine geringe Differenz des Zahlenfaktors mit der Gleichung (24) identisch.

Damit hat das Wesen des eigentümlichen Richtungseffektes eines geknickten Senders qualitativ seine völlige Aufklärung gefunden. Natürlich ist die letzte Rechnung quantitativ eine sehr überschlägliche. Die Einführung eines mittleren Hebelarmes ist nur eine vorläufige Annäherung. Wenn man statt dessen die jeweilige variable Entfernung zweier Oberflächenelemente mit entgegengesetzter Phase bereits bei der Integration mit berücksichtigt, so ergibt sich ein größerer Wert des Zahlenfaktors. Hierbei ist aber der Umstand mißlich, daß durch Einführung dieser Entfernung $= 2\,r\cos\varphi$ der Integrand gerade an den Stellen, wo weder $k_1 R$ noch R_v streng genommen noch als konstant angesehen werden dürfen, erheblich mehr ins Gewicht fällt. Integriert man in dieser Weise von $r = 0$ bis $r = \infty$, so ergibt sich der Faktor 6 statt 2,3, das ist also die größtmögliche Abweichung. In diesem Falle hätte man sich $a k_1$ so gering zu denken, daß bei größeren Werten von $k_1 r$ keine Beiträge zum Integral mehr geliefert werden.

Die Höhe $a k_1$ ist durch die Integration aus unseren Formeln verschwunden und es ist tatsächlich keine Abhängigkeit des Richtungseffektes von der Höhe $a k_1$ vorhanden, wie es nach unseren allgemeinen Formeln des § 3 sein muß. Ebenso hat das Vorkommen des Faktors k_2 im Nenner seine Aufklärung gefunden. Dafür erscheint die Stärke

1) S. Schlömilch, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. II. Bd., 4. Aufl., S. 39.

des Richtungseffektes zu groß, wenn wir ihn allein aus den Vorgängen in allernächster Nachbarschaft des Senders ableiten wollen. Es wird daher offenbar auch noch die etwas weitere Umgebung eine Rolle spielen, d. h. es sind in Formel (22a) auch die übrigen Glieder der Klammer zu berücksichtigen. Dabei haben wir aber immer noch nur das Gebiet im Auge, in dem die einfache Welle $\frac{e^{ik_1 R}}{R}$ maßgebend ist, während die unter dem Namen „Oberflächenwelle“ zusammengefaßten Erscheinungen nach unseren früheren Ergebnissen erst noch viel weiter draußen ins Gewicht fallen und hier nicht in Frage kommen. Es würde also streng genommen für die einzelnen Terme

Fig. 8.

in der Formel (22a) eine entsprechende Betrachtung, wie die hier für den letzten Term angedeutete, durchzuführen sein. Jeder dieser Terme liefert für sich einen ähnlichen Verlauf der Stromamplituden, nur daß das Maximum weniger scharf ausgeprägt ist und weiter hinaus rückt. Die Superposition dieser vier Bestandteile müßte dann für den Zahlenfaktor annähernd den richtigen Wert ergeben. Nach dem bisherigen Ergebnis würde für die Praxis die Möglichkeit bestehen, durch Beschränkung der schlechtleitenden Oberfläche auf ein sehr kleines Gebiet den Richtungseffekt sehr stark zu vergrößern, und eine experimentelle Entscheidung dieser Frage wäre von größtem Interesse.

Im übrigen ist natürlich die ganze hier gegebene Theorie nur als erste rohe Annäherung an die wirklichen Verhältnisse zu betrachten, weil in Wirklichkeit die Länge des horizontalen Teiles der Antenne etwa $\frac{1}{5}$ der Wellenlänge beträgt und daher die Vorgänge in der Nähe des Senders erheblich beeinflussen muß. Im allgemeinen dürfte die Wirkung dieser endlichen Länge darin bestehen, daß der Hebelarm der fingierten Doppeantenne vergrößert wird, da nach der Mitte der Antenne hin die Erdströme sich durch Interferenz zerstören müßten und nur nach den beiden Enden hin beträchtliche Erdwirkungen auftreten können.

Die Intensität der Erdströme wird dafür abnehmen, da ein merklicher Teil der Antenne sich in beträchtlichem Abstande von den in der Nähe der Enden auftretenden Maxima befindet und daher nur eine verhältnismäßig schwache Wirkung ausüben kann.

Resultate.

1. Der Richtungseffekt eines geknickten Marconischen Senders ist im Falle eines homogenen Bodens im wesentlichen dadurch gegeben, daß die einem Punkte an der Erdoberfläche zugeführte Energie mit

$$|Ak_2 + Bk_1 \cos\varphi|^2$$

proportional ist, wenn k_1 und k_2 die komplexen „Wellenzahlen" für Luft und Erde bedeuten, während $\frac{B}{A}$ das Verhältnis der horizontalen und vertikalen Antennenlänge ist.

2. Auch im Falle sehr großer Leitfähigkeiten des Bodens bleibt diese Abhängigkeit im wesentlichen bestehen, falls der Sender zunächst auf schlechterleitendem Boden steht und k_2 sich auf diesen letzteren bezieht.

3. Die Ursachen für das Auftreten einer solchen Richtung der Wellen sind nicht, wie meist angenommen wird, in horizontal verlaufenden Erdströmen zu suchen, sondern in einem vertikalen Schwingungsvorgang, der sich in unmittelbarer Nähe des Senders im Erdinnern abspielt und dieselbe Wirkung hat, wie zwei einfache, in der Vorzugsrichtung aufgestellte vertikale Antennen von entgegengesetzter Phase in einem gewissen Abstande voneinander sie ausüben würden. Das Auftreten dieser Erscheinung ist dabei durchaus an ein gewisses Gebiet mittlerer Leitfähigkeit gebunden. Bei den Bodenarten, mit denen die Praxis zu rechnen hat, ist dieser Effekt um so größer, je kleiner die Leitfähigkeit ist, um bei sehr kleinen Werten der letzteren wieder schwächer zu werden.

4. Die Charakteristik des Wellenvorganges, d. h. die Kurve

$$R = |Ak_2 + Bk_1 \cos\varphi|$$

zeigt bei schlechtleitendem Boden Radienverhältnisse (Amplitudenverhältnisse), wie sie in derselben Größenordnung von Marconi beobachtet wurden.

Anhang.

Mathematische Ergänzungen.

Verschiedene Methoden der Entwickelung.

Die Entwickelungen im ersten Teil dieser Arbeit führten auf Formeln, die außer elementaren Funktionen nur noch einen immer wiederkehrenden komplizierteren Integralausdruck enthielten, der für das Verhalten elektrischer Wellen in zwei durch eine Ebene getrennten Halbräumen von verschiedenem elektrischen Verhalten charakteristisch und dessen Kenntnis daher von Wichtigkeit ist. Wir nannten ihn dort $\Phi(r, z)$ und er war im ersten, bzw. zweiten Medium gegeben durch:

$$\Phi_1 = \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, \lambda\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z}\, d\lambda}{k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}$$

$$\Phi_2 = \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\, \lambda\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}\, z}\, d\lambda}{k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}$$

Dieselben Ausdrücke treten auch, und zwar als vollständige Darstellung des Feldes im Falle einer symmetrischen Antenne in der oft zitierten Arbeit von Sommerfeld auf.

Für diese beiden Integrale haben wir nun explizite Ausdrücke anzugeben, die eine numerische Berechnung gestatten. Wir werden dabei den Fall besonders hervorheben, daß $\left|\frac{k_2^2}{k_1^2}\right|$ eine einigermaßen große Zahl ist, weil derselbe für die Praxis allein von Wichtigkeit ist, bemerken aber, daß auch der Fall geringerer Werte dieser Konstanten unschwer behandelt werden kann.

Da es, wie sich im ersten Teile zeigte, von Wichtigkeit ist, das Verhalten der obigen Integrale einmal für große $|k_1 r|$ und geringe

Höhen $|k_1 z|$, und dann auch für sehr kleine $|k_1 r|$ und beliebige $|k_1 z|$ zu kennen, so werden wir zwei verschiedene Entwickelungen anzugeben haben. Die eine schreitet nach Potenzen von z, die andere nach Potenzen von r fort. Die letztere interessiert uns indessen weniger, und wird, soweit sie für den ersten Teil dieser Arbeit in Betracht kommt, durch die Ausführungen auf S. 75—77 erledigt. Das Folgende behandelt also wesentlich die Entwickelung nach Potenzen von z.

§ 1. Transformation der Integrale.

Die Funktionen Φ enthalten zwei verschiedene Wurzelausdrücke, und es ist daher von großem Vorteil, diese Komplikation zunächst zu beseitigen, was leicht dadurch erreicht wird, daß man Zähler und Nenner mit $k_1^2 + \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - k_2^2 + \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ multipliziert. Dann ergibt sich:

$$\Phi = \int_0^\infty \frac{(k_1^2 + \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - k_2^2 + \sqrt{\lambda^2 - k_1^2})\, J(\lambda r)\, e^{\pm \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z}\, \lambda\, d\lambda}{\lambda^2 - \frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}}$$

oder, wenn für: $\frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}$ zur Abkürzung s^2 gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} \Phi = \frac{k_1^2}{k_1^4 - k_2^4} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\lambda^2 - s^2}\, J(\lambda r)\, e^{\pm \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z}\, \lambda\, d\lambda - \\ - \frac{k_2^2}{k_1^4 - k_2^4} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}{\lambda^2 - s^2}\, J(\lambda r)\, e^{\pm \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z}\, \lambda\, d\lambda \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die stets komplexe Größe s ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Oberflächenwellen und stimmt in der Bezeichnung mit Sommerfeld überein.

Jetzt enthält jedes der beiden Integrale, wenigstens für $z = 0$ nur noch einen Wurzelausdruck und Φ erscheint wesentlich vereinfacht. Wir bemerken, daß für $\left|\frac{k_2^2}{k_1^2}\right| \gg 1$ der Wert $\left|\frac{k_1^2}{s^2}\right|$ nahezu $= 1$ ist, während $\left|\frac{k_2^2}{s^2}\right|$ ebenfalls $\gg 1$ sein muß und sehen daher voraus, daß die beiden Integrale unter diesen Umständen ein wesentlich verschiedenes Verhalten zeigen werden.

Wird Φ in eine Taylorsche Reihe nach Potenzen von z entwickelt, so lautet dieselbe:

$$\Phi = \Phi_{z=0} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}_{z=0} \cdot z + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}_{z=0} \cdot \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

und man sieht ohne weiteres, daß alle vorkommenden Ableitungen außer der Funktion $\Phi_{z=0}$ nur noch einen neuen komplizierteren Integralausdruck enthalten können, nämlich:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\lambda^2 - s^2} J(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda$$

denn sobald im Zähler gerade Potenzen der Wurzeln, also z. B.: $(\lambda^2 - k_1^2)^n$ auftreten, lassen sich die fraglichen Ausdrücke durch Addition und Subtraktion ebensolcher Polynome, welche an Stelle von k_1^2 den Wert s^2 enthalten, also $(\lambda^2 - s^2)^n$ entweder von den höheren Potenzen von λ^2 oder vom Nenner $\lambda^2 - s^2$ befreien und auf dieselben grundlegenden Formen zurückführen.

Der für uns wichtigste Ausdruck ist $\Phi_{z=0}$ selbst und diesen behandeln wir zunächst.

Es erweist sich dabei als sehr vorteilhaft, die fraglichen Integrale zuerst noch auf eine andere Form zu bringen, bei der die entscheidende Konstante k^2 nicht mehr in den Integranden, sondern nur noch in die Grenzen des Integrals eingeht.

Es ist nämlich:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\lambda^2 - s^2} J(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda = \frac{e^{ikr}}{r} + i\sqrt{s^2 - k^2} \int_{\frac{k}{s}}^1 \frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1 - \lambda^2}}\, d\lambda \quad \ldots (2)$$

Die Gültigkeit dieser Beziehung, die in exakter Weise hergeleitet werden kann, läßt sich folgendermaßen verifizieren:

Schreibt man nach S. 14

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int_0^\infty J(\lambda r) \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}$$

so wäre nach Gleichung (2)

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\lambda^2 - s^2} - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \right) J(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda = (s^2 - k^2) \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda^2 - s^2} =$$

$$= i\sqrt{s^2 - k^2} \int_{\frac{k}{s}}^1 \frac{e^{isr\mu}}{\sqrt{1 - \mu^2}}\, d\mu$$

oder mit $\varrho = r s$, $\varkappa = \frac{k}{s}$, $\mu = \lambda/s$

$$\chi = \int_0^\infty \frac{J_0(\varrho\,\mu)\,\mu\, d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \varkappa^2}(\mu^2 - 1)} = \frac{i}{\sqrt{1 - \varkappa^2}} \int_\varkappa^1 \frac{e^{i\varrho\mu}}{\sqrt{1 - \mu^2}}\, d\mu \quad \ldots \quad (2\,a)$$

Dies ist zu beweisen.

Beide Seiten der obigen Gleichung genügen aber der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\chi}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\chi}{d\varrho} + \chi = -\frac{e^{i\varkappa\varrho}}{\varrho} \quad \ldots \quad (3)$$

Denn betrachtet man zunächst die linke Seite der Gleichung (2a), so läßt sich unter Verwendung der Besselschen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2}{d\varrho^2} J_0(\mu\varrho) + \frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho} J_0(\mu\varrho) + \mu^2 J_0(\mu\varrho) = 0$$

schreiben:

$$\frac{d^2\chi}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\chi}{d\varrho} + \int_0^\infty \frac{J_0(\mu\varrho)}{\sqrt{\mu^2 - \varkappa^2}} \frac{\mu^2}{\mu^2 - 1}\, \mu\, d\mu = 0$$

oder da

$$\int_0^\infty \frac{J_0(\varrho\,\mu)}{\sqrt{\mu^2 - \varkappa^2}} \cdot \frac{\mu^2}{\mu^2 - 1}\, \mu\, d\mu = \int_0^\infty \frac{J_0(\varrho\,\mu)}{\sqrt{\mu^2 - \varkappa^2}} \left(1 + \frac{1}{\mu^2 - 1}\right) \mu\, d\mu$$

$$= \frac{e^{i\varkappa\varrho}}{\varrho} + \chi \text{ ist:}$$

$$\frac{d^2\chi}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\chi}{d\varrho} + \chi = -\frac{e^{i\varkappa\varrho}}{\varrho}$$

Andererseits wird für die rechte Seite von Gleichung (2a):

$$\frac{d^2\chi}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\chi}{d\varrho} + \chi = \frac{i}{\sqrt{1-\varkappa^2}} \int_{\varkappa}^{1} \left(-\mu^2 + \frac{i\mu}{\varrho} + 1 \right) \frac{e^{i\varrho\mu}}{\sqrt{1-\mu^2}}\, d\mu$$

Nun ist:

$$\frac{i}{\varrho} \int_{\varkappa}^{1} \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} e^{i\varrho\mu}\, d\mu = \frac{i}{\varrho} \sqrt{1-\varkappa^2}\, e^{i\varrho\varkappa} - \int_{\varkappa}^{1} \sqrt{1-\mu^2}\, e^{i\varrho\mu}\, d\mu$$

Setzt man dies in die darüberstehende Gleichung ein, so erhält man wieder die Differentialgleichung (3).

Ferner bleiben beide Seiten der Gleichung (2a) für $\varrho = 0$ endlich und nehmen hier denselben Wert an, nämlich $\frac{\arccos \varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 - 1}}$.

Dann müssen aber die beiden Seiten der Gleichung (2a) durchweg übereinstimmen; denn die beiden unabhängigen Partikularlösungen der Gleichung (3) können so gewählt werden, daß die eine bei $\varrho = 0$ endlich bleibt, die andere hier unendlich wird. Zwei endlich bleibende Lösungen mit demselben Anfangswert bei $\varrho = 0$ müssen dann offenbar identisch sein.

Damit haben wir die Integrale in Gleichung (1) auf eine Form gebracht, die eine numerische Berechnung in einfachster Weise gestattet. Wir haben jetzt für $\Phi_{z=0}$ nach Gleichung (1):

$$\Phi_{z=0} = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} = \frac{k_1^2}{k_1^4 - k_2^4} \left\{ \frac{e^{ik_2 r}}{r} + i\sqrt{s^2 - k_2^2} \int_{k_2}^{s} \frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, d\lambda \right\}$$

$$- \frac{k_2^2}{k_1^4 - k_2^4} \left\{ \frac{e^{ik_1 r}}{r} + i\sqrt{s^2 - k_1^2} \int_{k_1}^{s} \frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, d\lambda \right\} \qquad (4)$$

und wollen gleich bemerken, daß, da die Wurzeln durchweg mit positiv reellem Teil zu nehmen sind, worauf der Doppelstrich hindeuten soll:

$$\sqrt{s^2 - k_1^2} = \sqrt{-k_1^4}\,/\,\sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \frac{ik_1^2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \qquad (5)$$

und:

$$\sqrt{s^2 + k_2^2} = \sqrt{\frac{-k_2^4}{k_1^2 + k_2^2}} = -\frac{i k_2^2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \qquad (5)$$

ist, so daß auch geschrieben werden kann:

$$\Phi_{z=0} = \frac{k_1^2}{k_1^4 - k_2^4} \cdot \frac{e^{i k_2 r}}{r} - \frac{k_2^2}{k_1^4 - k_2^4} \frac{e^{i k_1 r}}{r} + \\ + \frac{k_1^2 k_2^2}{(k_1^4 - k_2^4)\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left\{ \int_{\frac{k_1}{s}}^{1} \frac{e^{i s r \lambda}}{\sqrt{1 - \lambda^2}} d\lambda + \int_{\frac{k_2}{s}}^{1} \frac{e^{i s r \lambda}}{\sqrt{1 - \lambda^2}} d\lambda \right\} \qquad (6)$$

Man sieht nun zunächst sofort, daß das Verhalten für $r = 0$ gegeben ist durch:

$$\lim_{r=0} \Phi = \frac{k_1^2}{k_1^4 - k_2^4} \frac{e^{i k_2 r}}{r} - \frac{k_2^2}{k_1^4 - k_2^4} \frac{e^{i k_1 r}}{r} \simeq \frac{1}{k_1^2 + k_2^2} \cdot \frac{1}{r}$$

denn die beiden Integrale in Gleichung (4) bleiben für $r = 0$ endlich, da der Integrand für $\lambda = 1$ sich verhält wie $\frac{1}{\sqrt{\lambda - 1}}$.

Hierzu tritt dann eine nach positiven Potenzen von r fortschreitende Reihe und für sehr große Entfernungen $|k_2 r|$ wird eine Entwickelung nach negativen Potenzen von r am Platze sein.

§ 2. Allgemeine Diskussion der Integrale.

Wir wollen zunächst die verschiedenen möglichen Entwickelungen für das Integral in Gleichung (4) im allgemeinen angeben, um sodann die für den Fall größerer Werte von $\left|\frac{k_2^2}{k_1^2}\right|$ besonders geeigneten hervorzuheben:

1. Wir schreiben:

$$\int_{\frac{k}{s}}^{1} \frac{e^{i s r \lambda}}{\sqrt{1 - \lambda^2}} d\lambda = e^{i k r} \int_{\frac{k}{s}}^{1} \frac{e^{i r (s\lambda - k)}}{\sqrt{1 - \lambda^2}} d\lambda$$

setzen hier

$$s\lambda - k = t, \quad \lambda = \frac{k + t}{s}, \quad \sqrt{1 - \lambda^2} = \frac{1}{s}\sqrt{s^2 - (t + k)^2}, \quad d\lambda = \frac{dt}{s}$$

und erhalten so:

$$\int_{\frac{k}{s}}^{1} \frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,d\lambda = e^{ikr}\left\{\int_0^{s-k} \frac{dt}{\sqrt{s^2-(t+k)^2}} + \frac{ir}{1!}\int_0^{s-k} \frac{t\,dt}{\sqrt{s^2-(t+k)^2}} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{(ir)^n}{n!}\int_0^{s-k} \frac{t^n\,dt}{\sqrt{s^2-(t+k)^2}} + \ldots\right\} \quad (7)$$

Die vorkommenden Integrale lassen sich ausführen. Die ersten beiden ergeben z. B.

$$\int_0^{s-k} \frac{dt}{\sqrt{s^2-(t+k)^2}} = \arccos\left(\frac{k}{s}\right)$$

$$\int_0^{s-k} \frac{t\,dt}{\sqrt{s^2-(t+k)^2}} = -k\arccos\left(\frac{k}{s}\right) + s\sqrt{1-\left(\frac{k}{s}\right)^2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Damit erhalten wir für die in Gleichung (4) vorkommenden { }:

$$\frac{e^{ikr}}{r} + i\sqrt{s^2-k^2}\int_0^1 \frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,d\lambda = \frac{e^{ikr}}{r}\left\{1 + ikr\sqrt{\frac{s^2}{k^2}-1}\arccos\frac{k}{s} + \right.$$
$$\left. + \frac{(ikr)^2}{1!}\sqrt{\frac{s^2}{k^2}-1}\left(\sqrt{\frac{s^2}{k^2}-1} - \arccos\left(\frac{k}{s}\right)\right) + \ldots\right\} \quad (8)$$

Dies ist eine unter allen Umständen gültige Potenzreihe für unseren Ausdruck. Sie konvergiert aber nur gut, solange $\left|\frac{s}{k}\right|$ nahezu 1 ist und sehr schlecht für große $\left|\frac{k}{s}\right|$. Die Koeffizienten sind zudem ziemlich kompliziert, und wir suchen noch einige einfachere Formen.

2. Es ist auch

$$\int_{\frac{k}{s}}^{1} \frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,d\lambda = \int_{\frac{k}{s}}^{1} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} + \frac{isr}{1!}\int_{\frac{k}{s}}^{1} \frac{\lambda\,d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} + \frac{(isr)^2}{2!}\int_{\frac{k}{s}}^{1} \frac{\lambda^2\,d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} + \ldots \quad (9)$$

Wieder lassen sich die Integrale ausführen und liefern:

$$\int_{\frac{k}{s}}^{1} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \left[\arcsin \lambda\right]_{\frac{k}{s}}^{1} = -i \log\left[\frac{k}{s} + \sqrt{\frac{k^2}{s^2} - 1}\right] = \arccos \frac{k}{s}$$

$$\int_{\frac{k}{s}}^{1} \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{1}{2}\int_{\frac{k}{s}}^{1} \frac{d(\lambda^2)}{\sqrt{1-\lambda^2}} = -i\sqrt{\frac{k^2}{s^2} - 1}$$

$$\int_{\frac{k}{s}}^{1} \frac{\lambda^2\, d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} = -\frac{1}{2}\left[\lambda\sqrt{1-\lambda^2}\right]_{\frac{k}{s}}^{1} + \frac{1}{2}\left[\arcsin \lambda\right]_{\frac{k}{s}}^{1} =$$

$$= -\frac{i}{2}\left\{\frac{k}{s}\sqrt{\frac{k^2}{s^2} - 1} + \log\left[\frac{k}{s} + \sqrt{\frac{k^2}{s^2} - 1}\right]\right\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Es wird also hier

$$\frac{e^{ikr}}{r} + i\sqrt{s^2 - k^2}\int_{\frac{k}{s}}^{1} \frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, d\lambda = \sqrt{s^2 - k^2}\left\{\frac{e^{ikr}}{\sqrt{s^2 - k^2}\, r} + \right.$$

$$+ \log\frac{k}{s}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{s^2}{k^2}}\right) + \frac{ikr}{1!}\sqrt{1 - \frac{s^2}{k^2}} +$$

$$+ \frac{(ikr)^2}{2\cdot 2!}\sqrt{1 + \frac{s^2}{k^2}}\left[1 + \frac{\log\frac{k}{s}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{s^2}{k^2}}\right)}{\frac{k^2}{s^2}\sqrt{1 - \frac{s^2}{k^2}}}\right] +$$

$$\left. + \frac{(ikr)^3}{3\cdot 3!}\left(1 + 2\frac{s^2}{k^2}\right)\sqrt{1 - \frac{s^2}{k^2}} + \cdots\right\} \tag{10}$$

Diese ebenfalls immer gültige Reihe wird im Gegensatz zu der vorigen um so brauchbarer, je größer $\left|\frac{k^2}{s^2}\right|$ ist, denn dann kann $\frac{s^2}{k^2}$ gegen 1 annähernd vernachlässigt werden und der obige Ausdruck wird einfach:

$$\left.\begin{aligned}\frac{e^{ikr}}{r} + i\sqrt{s^2-k^2}\int_{\frac{k}{s}}^{1}\frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,d\lambda = \sqrt{s^2-k^2}\Big\{&\frac{e^{ikr}}{\sqrt{s^2-k^2}\,r} + \\ &+ \log\frac{2k}{s} + \frac{ikr}{1!} + \frac{(ikr)^2}{2\cdot 2!} + \cdots\Big\}\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

3. Jetzt schreiben wir $\sqrt{1-\lambda^2} = \sqrt{1-\lambda}\cdot\sqrt{1+\lambda}$, dann ist

$$\int_{\frac{k}{s}}^{1}\frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,d\lambda = \int_{\frac{k}{s}}^{1}\frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda}\cdot\sqrt{1+\lambda}}\,d\lambda = e^{isr}\int_{\frac{k}{s}}^{1}\frac{e^{-isr(1-\lambda)}}{\sqrt{1-\lambda}\cdot\sqrt{1+\lambda}}\,d\lambda$$

und mit der Substitution: $1-\lambda = t \quad \sqrt{1+\lambda} = \sqrt{2-t} = \sqrt{2}\sqrt{1-\frac{t}{2}}$

$$\int_{\frac{k}{s}}^{1}\frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,d\lambda = \frac{e^{isr}}{\sqrt{2}}\int_{\frac{s-k}{s}}^{0}\frac{e^{-isrt}}{\sqrt{t}}\,dt\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{t}{2}\right)^2+\cdots\right\} \quad (12)$$

Wendet man fortgesetzte partielle Integration an, so erhält man für den ersten Term dieser Summe:

$$\int\frac{e^{-isrt}}{\sqrt{t}}\,dt = e^{-isrt}\left\{\frac{2}{1}t^{1/2}+\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}t^{3/2}(isr)+\frac{2\cdot 2\cdot 2}{1\cdot 3\cdot 5}t^{5/2}(isr)^2+\cdots\right\}$$

und nach Einführung der Grenzen 0 und $\frac{s-k}{s}$:

$$\frac{e^{isr}}{\sqrt{2}}\int_{\frac{s-k}{s}}^{0}\frac{e^{-isrt}}{\sqrt{t}}\,dt = -\frac{e^{ikr}}{\sqrt{2}}\left\{\frac{2}{1}\left(\frac{s-k}{s}\right)^{1/2}+\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\left(\frac{s-k}{s}\right)^{3/2}(isr)+\cdots\right\} \quad (12a)$$

und für den zweiten Term:

$$\frac{e^{isr}}{\sqrt{2}}\int_{\frac{s-k}{s}}^{0}e^{-isrt}\sqrt{t}\,dt = \left[\frac{e^{-isrt}}{-isr}+\frac{1}{2}\frac{1}{isr}\int\frac{e^{-isrt}}{\sqrt{t}}dt\right]_{\frac{s-k}{s}}^{0}\cdot\frac{e^{isr}}{\sqrt{1}}$$

$$= \frac{1}{2isr}\left\{\frac{e^{isr}}{\sqrt{2}}\int_{\frac{s-k}{s}}^{0}\frac{e^{-isrt}}{\sqrt{t}}\,dt+\frac{e^{ikr}}{\sqrt{2}}\frac{2}{1}\left(\frac{s-k}{s}\right)^{1/2}\right\} \quad (12b)$$

Die weiteren Terme berechnen sich ebenso einfach.

Man hat also hier in erster Näherung (wenn nur der erste Term in der Gleichung (12) gebraucht wird):

$$\frac{e^{ikr}}{r} + i\sqrt{s+k}\cdot\sqrt{s-k}\int_{\frac{k}{s}}^{1}\frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,d\lambda = \frac{e^{ikr}}{r}\left\{1 - \sqrt{\frac{s+k}{2s}}\cdot\frac{2}{1}i(k-s)+\ldots\right\}$$

$$= \frac{e^{ikr}}{r}\left\{1 - \sqrt{\frac{s+k}{2s}}\,\frac{2}{1}\alpha^2 + \sqrt{\frac{s+k}{2s}}\,\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\,\alpha^4 - \cdots\right\}$$

Wenn die hier auftretende Entwickelungsgröße

$$\alpha^2 = i(k-s)r$$

gesetzt wird.

Diese Darstellung ist offenbar besonders geeignet, wenn $\frac{k}{s}$ nahezu $= 1$ ist. Dann kann auch noch ohne weiteres

$$\sqrt{\frac{s+k}{2s}} = \sqrt{\frac{1+\frac{k}{s}}{2}} \cong 1$$

angenommen werden, so daß in erster Näherung

$$\frac{e^{ikr}}{r} + i\sqrt{s^3-k^2}\int_{\frac{k}{s}}^{1}\frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,d\lambda =$$

$$= \frac{e^{ikr}}{r}\left\{1 - \frac{2}{1}\alpha^2 + \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\alpha^4 - \right\} \quad \left|1 - \frac{k}{s}\right| \ll 1 \quad (12\,c)$$

wird.

Als zweite Näherung würde nach Gleichung (12) und (12b) sich ergeben:

$$\frac{e^{ikr}}{r}\left(A - 1 + \frac{2}{1}\alpha^2 \over 8isr\right)$$

wenn A die Summe in Gleichung (12c) bedeutet.

4. Ebenso einfach leitet sich eine semikonvergente Darstellung unseres Integrals für große $|kr|$ her.

Durch Zerlegung des Integrationsweges in zwei Teile erhält man:

$$\int_{\frac{k}{s}}^{1} \frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, d\lambda = \int_{\infty}^{1} \frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, d\lambda - \int_{\infty}^{\frac{k}{s}} \frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, d\lambda$$

Der erste Term ist eine bekannte Funktion:

$$\int_{\infty}^{1} \frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, d\lambda = \frac{\pi}{2}\, H_1{}^0(sr)$$

wo $H_1{}^0(sr)$ die erste Hankelsche Funktion von der Ordnung 0 bedeutet. Für den zweiten Term erhält man dagegen durch fortgesetzte partielle Integration:

$$\int \frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, d\lambda = \frac{e^{isr\lambda}}{isr} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} - \frac{1}{isr} \int \frac{e^{isr\lambda}}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\, \lambda\, d\lambda$$

$$= \frac{e^{isr\lambda}}{isr\sqrt{1-\lambda^2}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{isr}\, \frac{\lambda}{\lambda^2-1} + \frac{1}{(isr)^2} \cdot \frac{2\lambda^2+1}{(\lambda^2-1)^2} + \cdots \right\}$$

und wenn die Grenzen $\frac{k}{s}$ und ∞ eingeführt werden:

$$\int_{\infty}^{\frac{k}{s}} \frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, d\lambda = \frac{e^{ikr}}{ir\sqrt{s^2-k^2}} \left\{ 1 + \frac{1}{\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right)} \cdot \frac{1}{ikr} + \frac{2+\frac{s^2}{k^2}}{\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{(ikr)^2} + \cdots \right\}$$

$$= \frac{e^{ikr}}{ir\sqrt{s^2-k^2}} \left\{ 1 + \frac{1}{1+\frac{s}{k}} \cdot \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2+\left(\frac{s}{k}\right)^2}{\left(1+\frac{s}{k}\right)^2} \cdot \frac{1}{\alpha^4} + \cdots \right\}$$

wenn wieder $\alpha^2 = i(k-s)r$ ist.

Hiermit wird dann nach Gleichung (13):

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^{ikr}}{r} + i\sqrt{s^2-k^2} \int_{\frac{k}{s}}^{1} \frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, d\lambda = \sqrt{s^2-k^2}\, \frac{\pi i}{2}\, H_1{}^0(sr) - \\ - \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ \frac{1}{1-\frac{s^2}{k^2}}\, \frac{1}{ikr} + \frac{2+\frac{s^2}{k^2}}{\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{(ikr)^2} + \cdots \right\} \end{aligned}\right\} \quad (13a)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{e^{ikr}}{r}+i\sqrt{s^2-k^2}\int_{\frac{k}{s}}^{1}\frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,d\lambda=\\&=\sqrt{s^2-k^2}\,\frac{\pi i}{2}H_1{}^0(sr)-\frac{e^{ikr}}{r}\left\{\frac{1}{1+\frac{s}{k}}\cdot\frac{1}{\alpha^2}+\frac{2+\frac{s^2}{k^2}}{\left(1+\frac{s}{k}\right)^2}\cdot\frac{1}{\alpha^4}+\cdots\right\}\end{aligned}\right\}(13\,b)$$

5. Zum Schluß wollen wir noch der Vollständigkeit halber eine Entwickelung erwähnen, die insofern von Interesse ist, als aus ihr die Koeffizienten aller unserer bisherigen Reihen, der konvergenten, sowie der semikonvergenten, als Summen gewisser leicht zu bildender Reihen, entnommen werden können. Ein wesentlich neues Resultat finden wir dabei nicht und wollen daher den Gang der Entwickelung nur kurz andeuten.

Wir schreiben in der Ausgangsformel des soeben behandelten Falles 4.:

$$\int_{\infty}^{\frac{k}{s}}\frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,d\lambda=-i\int_{\infty}^{\frac{k}{s}}\frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{\lambda^2-1}}\,d\lambda=-i\int_{\infty}^{\frac{k}{s}}\frac{e^{isr\lambda}}{\lambda}\,d\lambda\left\{1+\frac{1}{2}\,\frac{1}{\lambda^2}+\frac{3}{8}\,\frac{1}{\lambda^4}+\ldots\right\}$$

$$\frac{e^{ikr}}{r}+i\sqrt{s^2-k^2}\int_{\frac{k}{s}}^{1}\frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,d\lambda=\frac{e^{ikr}}{r}+\sqrt{s^2-k^2}\,\frac{\pi i}{2}H_1{}^0(sr)+\sqrt{s^2-k^2}\int_{\infty}^{\frac{k}{s}}\frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{\lambda^2-1}}\,d\lambda$$

setzen: $\lambda=-\frac{u}{isr}\qquad -isr\lambda=u\qquad d\lambda=-\frac{du}{isr}\qquad \frac{1}{\lambda^2}=\left(\frac{isr}{u}\right)^2$

und erhalten:

$$\left.\begin{aligned}\int_{\infty}^{\frac{k}{s}}\frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{\lambda^2-1}}\,d\lambda=\int_{\infty}^{-ikr}\frac{e^{-u}}{u}\,du\Bigg\{&1+\frac{(isr)^2}{2}\cdot\frac{1}{u^2}+\frac{3}{8}(isr)^4\cdot\frac{1}{u^4}+\cdots\\&+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)(isr)^{2n}}{\Gamma(n+1)\,u^{2n}}+\cdots\Bigg\}\end{aligned}\right\}(14)$$

Die Reihe konvergiert beständig, da $\left|\frac{k}{s}\right| > 1$ sein muß, wie wir sahen und also $\frac{1}{\lambda^2}$ immer < 1 ist.

Alle Terme der Summe der Gleichung (14) lassen sich nun bekanntlich auf die eine Transzendente:

$$\int_{\infty}^{-ikr} \frac{e^{-u}}{u} du$$

zurückführen, welche wir mit $Ei(ikr)$ bezeichnen wollen und deren Verhalten bekannt ist.[1])

Man erhält z. B.

$$\int \frac{e^{-u}}{u^3} du = \frac{1}{2!} \int \frac{e^{-u}}{u} du + \frac{1}{2!} \frac{e^{-u}}{u} - \frac{1}{2!} \frac{e^{-u}}{u^2}$$

$$\int \frac{e^{-u}}{u^5} du = \frac{1}{4!} \int \frac{e^{-u}}{u} du + \frac{1}{4!} \frac{e^{-u}}{u} - \frac{1}{4!} \frac{e^{-u}}{u^2} + \frac{1}{3 \cdot 4} \frac{e^{-u}}{u^3} - \frac{1}{4} \frac{e^{-u}}{u^4}$$

$$\vdots \quad = \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Es ergibt sich also auch für die Gleichung (14) eine ähnlich gebaute „Doppelsumme". Wenn man dann die einzelnen Vertikalkolonnen summiert, so zeigt sich, daß diese Summen bekannt sind. So ergibt z. B. die erste Vertikalsumme:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2n+1)} \cdot (isr)^{2n} \int_{\infty}^{-ikr} \frac{e^{-u}}{u} du$$

Es ist aber

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2n} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n)} \cdot \sqrt{\pi}\, 2^{-2n+1} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)} 2^{-2n}$$

so daß der letzte Ausdruck identisch ist mit:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\left(\frac{isr}{2}\right)^{2n}}{n!\,n!} \int_{\infty}^{-ikr} \frac{e^{-u}}{u} du = J_0(sr)\, Ei(ikr)$$

wo $J_0(sr)$ die einfache Besselsche Funktion bedeutet.

1) Jahnke und Emde: Funktionentafeln S. 19, Teubner 1909. Unser $Ei(x)$ hängt mit dem „Integrallogarithmus" $li(x)$ in einfacher Weise zusammen. Es ist $Ei(x) = li(e^x)$.

In ähnlicher Weise erhält man für die weiteren Vertikalsummen:

$$-\frac{e^{ikr}}{ikr}(J_0(sr)-1)$$
$$-\frac{e^{ikr}}{(ikr)^2}(J_0(sr)-1)$$
$$-\frac{e^{ikr}}{(ikr)^3}2!\left(J_0(sr)-1-\frac{(isr)^2}{4}\right)$$
$$\vdots$$

und allgemein für die n^{te}:

$$-\frac{e^{ikr}}{(ikr)}(n-1)!\left\{J_0(sr)-\sum_{\mu=0}^{\mu<n}\frac{\left(\frac{isr}{2}\right)^{2\mu}}{\mu!\,\mu!}\right\}$$

Damit wird dann endlich

$$\left.\begin{aligned}\frac{e^{ikr}}{r}+i\sqrt{s^2-k^2}\int_{\frac{k}{s}}^{1}\frac{e^{isr\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}}d\lambda &= \sqrt{s^2-k^2}\,\frac{\pi i}{2}H_1{}^0(sr)+\\ &\quad+\sqrt{s^2-k^2}\,J_0(sr)\,Ei(ikr)\\ +\frac{e^{ikr}}{r}\Bigg\{1+\sqrt{1-\frac{s^2}{k^2}}\Bigg[&(J_0(sr)-1)+\\ &+\frac{1!}{ikr}(J_0(sr)-1)+\frac{2!}{(ikr)^2}\left(J_0(sr)-1-\frac{(isr)^2}{4}\right)+\\ +\frac{3!}{(ikr)^3}\left(J_0(sr)-1-\frac{(isr)^2}{4}\right)&+\frac{4!}{ikr^4}\left(J_0(sr)-1-\frac{(isr)^2}{4}-\frac{(isr)^4}{64}\right)+\\ +\quad\vdots\qquad\qquad&+\quad\vdots\qquad\qquad\Bigg]\Bigg\}\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Diese Reihe ist vollständig konvergent, solange die Klammern nicht zerrissen werden. Für kleine $|kr|$ haben sich die negativen Potenzen von ikr immer gegen den Zähler heraus und der Koeffizient jeder Potenz von r erscheint als eine gut konvergierende Reihe. Für große $|kr|$ hingegen ergibt sich eine semikonvergente Reihe nach negativen Potenzen von ikr, wenn man eine endliche Anzahl von Klammern geeignet auflöst und wieder die Koeffizienten jeder negativen Potenz von ikr zu einer Summe zusammenschließt. Dabei ließe sich auch über die Größe des Restgliedes der semikonvergenten Entwickelung Aufschluß erhalten.

Beispiel I.

Sei $\left|\frac{k^2}{s^2}\right| \gg 1$, so daß $\frac{s}{k} \simeq 0$ gesetzt werden kann. Ferner sei $|kr|$ eine große Zahl.

Dann ist bekanntlich

$$Ei(ikr) = \frac{e^{ikr}}{ikr}\left(1 + \frac{1!}{ikr} + \frac{2!}{(ikr)^2} + \cdots\right)$$

$$\sqrt{s^2 - k^2}\, J_0(sr)\, Ei(ikr) = -ik J_0(sr) \frac{e^{ikr}}{ikr}\left(1 + \frac{1!}{ikr} + \frac{2!}{(ikr)^2} + \cdots\right)$$

Andererseits gibt hier der Klammerausdruck in Gleichung (15), wenn die Klammern zerrissen werden:

$$+ ik J_0(sr) \frac{e^{ikr}}{ikr}\left(1 + \frac{1!}{ikr} + \frac{2!}{(ikr)^2} + \cdots\right) - \frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{1!}{ikr} + \frac{2!}{(ikr)^2} + \cdots\right)$$

so daß wir im ganzen für Gleichung (15) erhalten:

$$\sqrt{s^2 - k^2}\, \frac{\pi i}{2} H_1{}^0(sr) - \frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{1}{ikr} + \frac{2!}{(ikr)^2} + \frac{3!}{(ikr)^3} + \cdots\right)$$

und dies stimmt vollkommen mit Gleichung (13a) überein.

Beispiel II.

Sei wieder $\left|\frac{k^2}{s^2}\right| \gg 1$, aber $|sr| \ll 1$.

Dann kann auch $J_0(sr) \cong 1$ gesetzt werden und Gleichung (15) geht einfach über in:

$$\sqrt{s^2 - k^2}\left(\frac{\pi i}{2} H_1{}^0(sr) + Ei(ikr) + \frac{e^{ikr}}{\sqrt{s^2 - k^2}\, r}\right)$$

Für $|sr| \ll 1$ ist:

$$\frac{\pi i}{2} H_1{}^0(sr) \cong -C - \log\left(\frac{-isr}{2}\right)$$

$$Ei(ikr) = +C + \log(-ikr) + \frac{ikr}{1!} + \frac{(ikr)^2}{2 \cdot 2!} + \cdots$$

wo C die Eulersche Konstante bedeutet.

Daher wird hier der Ausdruck der Gleichung (15):

$$\sqrt{s^2-k^2}\left(\frac{e^{ikr}}{\sqrt{s^2-k^2}\,r}+\log\frac{2k}{s}+\frac{ikr}{1!}+\frac{(ikr)^2}{2\cdot 2!}+\cdots\right)$$

und dies ist unsere frühere Formel (11).

§ 3. Anwendung auf den praktisch wichtigen Fall größerer Leitfähigkeiten und Wellenlängen.

Mit den gewonnenen Resultaten wollen wir nun speziell den Fall $\left|\frac{k_2^2}{k_1^2}\right| \geqq 13$ ins Auge fassen, der die für große Wellenlängen in praxi vorkommenden Verhältnisse einschließt.

1. Was zunächst den zweiten Term $\Phi^{(2)}$ von Φ in Formel (4) betrifft, so ist hier:

$$\frac{s}{k_1}=\frac{k_2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\cong 1-\frac{1}{2}\frac{k_1^2}{k_2^2} \text{ nahezu } =1$$

und wir können zur Auswertung des Integrals mit Vorteil die Formel (12a) anwenden. Dabei genügt diese erste Näherung vollkommen. Denn in der zweiten Näherung (Gleichung 12d) läßt sich schreiben:

$$\frac{A-1+2\alpha^2}{8isr}=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{s+k_1}{2s}}\cdot\frac{k_1}{s}\left(1-\frac{s}{k_1}\right)\left\{\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\alpha^2-\frac{2\cdot 2\cdot 2}{1\cdot 3\cdot 5}\alpha^4+\cdots\right\}$$
$$\cong\frac{1}{16}\frac{k_1^2}{k_2^2}\left\{\frac{2}{1}\frac{2}{3}\alpha^2-\cdots\right\}$$

Bei kleinen $|\alpha^2|$ ist dies gegen 1 ganz zu vernachlässigen. Aber noch bei $\alpha^2=5$ beträgt die Summe A etwa $-\frac{1}{7}$ und es ist zudem:

$$isr=i(k-s)r\frac{s}{k-s}=\frac{s}{k}\alpha^2\frac{1}{1-\frac{s}{k}}\cong 2\alpha^2\frac{k_2^2}{k_1^2}$$

so daß unter unseren Voraussetzungen für $\alpha^2=5$ die Korrektur höchstens: (α^2 ist wesentlich reell!)

$$\frac{-\frac{1}{7}-1+10}{8\cdot 10\cdot 26}\cong\frac{1}{125}$$

betragen kann und dies ist gegen $A=-\frac{1}{7}$ wiederum zu vernachlässigen.

Da bei noch größeren Werten von α^2 aber bereits die semikonvergente Darstellung (Gleichung 13b) vorteilhafter wird, so ist

$$\Phi^{(2)} = -\frac{k_2^2}{k_1^4 - k_2^4} \cdot \frac{e^{ik_1 r}}{r} \left\{ 1 - \frac{2}{1}\alpha^2 + \frac{2}{1}\frac{2}{3}\alpha^4 \ldots \right\}_{|\alpha^2| \leq 5}$$

2. Der erste Term $\Phi^{(1)}$ in Gleichung (4) wird besonders einfach, wenn man Entfernungen betrachtet, die größer sind als etwa $\frac{1}{4}$ Wellenlänge.

Es ist nämlich:[1])

$$\frac{\pi i}{2} H_1^0(sr) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{isr}}{\sqrt{sr}} \left\{ 1 - \frac{i}{8sr} - \frac{9}{128(sr)^2} + \ldots \right\}$$

und bei mäßigen Genauigkeitsansprüchen braucht bereits bei

$$|sr| = \frac{1}{4}\, l = 1{,}57$$

nur noch das erste Glied berücksichtigt zu werden. Man erhält dann aus Gleichung (13a), wenn $\frac{s^2}{k_2^2}$ gegen 1 gestrichen und $\sqrt{s^2 - k_2^2} \cong -ik_2$ gesetzt wird:

$$\Phi^{(1)} = \frac{k_1^2}{k_1^4 - k_2^4} \cdot \sqrt{s^2 - k_2^2} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{isr}}{\sqrt{sr}} + \frac{e^{ik_2 r}}{(ik_2 r)^2} \left(1 + \frac{2!}{ik_2 r} + \ldots \right) \right\}$$

und da für $|sr| = 1{,}57$ jetzt $ik_2 r$ mindestens $= 5{,}7\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ist, so reduziert sich dies auf

$$\Phi^{(1)} = \frac{k_1^2}{k_1^4 - k_2^4} \sqrt{s^2 - k_2^2}\, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{isr}}{\sqrt{sr}}$$

Für geringe Werte von $|ik_2 r|$ wird die Berechnung komplizierter, läßt sich aber an Hand der Formeln (10a), (10b) und (13a) immer durchführen. Für $r = 0$ tritt, wie wir bereits gesehen haben $\Phi^{(2)}$ gegen $\Phi^{(1)}$ wieder vollkommen zurück. Wir wollen uns für das Folgende in diesem Paragraphen überhaupt auf die Annahme $|k_2 r| \geqq 5$ beschränken und können dann unser Resultat folgendermaßen schreiben:

1) N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Teubner 1904, S. 152 u. 153.

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{z=0} = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} &= \frac{-i k_1^2 k_2^2}{k_1^4 - k_2^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left\{ H_1^0(s r) \frac{\pi i}{2} + \frac{B_0}{\sqrt{s^2 - k_1^2}} \right\} \\
B_0 &= \frac{e^{i k_1 r}}{r} \cdot A = \frac{e^{i k_1 r}}{r} \left\{ 1 - \frac{2}{1} \alpha^2 + \frac{2}{1} \frac{2}{3} \alpha^4 - \dots \right\}_{|\alpha^2| < 5} \\
B_0 &= \frac{\pi i}{2} H_1^0(s r) \sqrt{s^2 - k_1^2} - \frac{e^{i k_1 r}}{r} \left\{ \frac{1}{2 \alpha^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha^4} + \dots \right\}_{\alpha^2 > 5} \\
k_2 r \geqq 5 \qquad \left| \frac{k_2^2}{k_1^2} \right| \geqq 13 \qquad & \frac{\pi i}{2} H_1^0(s r) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i \frac{\pi}{4}} \frac{e^{i s r}}{\sqrt{s r}}
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Dies ist für große $k_1 r$ im wesentlichen das von Sommerfeld[1]) zuerst hergeleitete Resultat. Etwas abweichend ist die Definition der „numerischen Entfernung". Sie stimmt in erster Näherung mit der Sommerfeldschen überein, ist aber sonst von einfacherer Struktur, was damit zusammenhängt, daß nach der hier gegebenen Entwickelung der Wurzelausdruck $\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$ nicht von vornherein mit $\sqrt{s^2 - k_2^2}$ identifiziert zu werden brauchte.

Diese Identifizierung erweist sich im übrigen als vollkommen berechtigt für Entfernungen, bei denen

$$k_2 r > 5$$

ist. Ist das der Fall, so ist die „Oberflächenwelle", d. h. $\Phi^{(1)}$ in der Tat gegeben durch: $H_1^0(s r)$.

Was ferner die „Raumwelle" $\Phi^{(2)}$ angeht, so zeigt es sich, daß die für „kleine numerische Entfernung" gültige Reihe bis an den Nullpunkt heran ihre volle Gültigkeit behält, obgleich sie in der Sommerfeldschen Darstellung durch die zunächst nur für große Werte des Arguments statthafte Ersetzung gewisser H-Funktionen durch ihre asymptotischen Grenzwerte entstanden war. Dieses Resultat ist von Wichtigkeit; es zeigt, daß in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes die Differenz von k_1 und s in $\Phi^{(2)}$ keine Rolle spielt und hier k_1 und s zunächst identifiziert werden können. Endlich findet die bereits von Sommerfeld hervorgehobene eigentümliche Tatsache, daß in geringeren Entfernungen zunächst nur die „Hälfte" der Oberflächenwelle auftritt, und sich die andere Hälfte erst bei größeren $k_1 r$ deutlich von der „Raumwelle" absondert, eine eingehende Bestätigung.

Wir sahen in Formel (9), daß für sehr geringe Entfernungen streng genommen zwei einfache Raumwellen vorhanden sind:

---

1) Sommerfeld, l. c., S. 708 u. 719.

$$\frac{e^{ik_1 r}}{r} \quad \text{und} \quad -\frac{k_1^2}{k_2^2}\,\frac{e^{ik_2 r}}{r}.$$

Jede dieser Wellen spaltet sich [siehe Gleichung (13b)] im Verlauf in zwei deutlich unterscheidbare Teile, eine „Oberflächenwelle" und eine Summe von Wellen komplizierteren Charakters. Während indessen die beiden abgespalteten Oberflächenwellen einander vollkommen gleich sind und sich zu einer einzigen Welle mit verdoppelter Amplitude zusammensetzen, ist dies bei den abgespalteten „Raumwellen" nicht mehr der Fall, sondern die starke exponentielle Dämpfung der zweiten läßt sie gegen die erste vollkommen zurücktreten. Zudem geht diese Abspaltung bei der zweiten Welle bedeutend schneller vor sich, so daß bereits bei geringen Entfernungen nur noch die entsprechende Oberflächenwelle von Belang ist. Es ist klar, daß bei verminderter Leitfähigkeit des zweiten Mediums diese Verhältnisse sich wesentlich ändern müssen.

§ 4. Entwickelungen nach der Höhe z in einiger Entfernung vom Sender.

Wenn wir nun auf die Abhängigkeit von z eingehen wollen, so haben wir weiter das auf S. 51 erwähnte Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\lambda^2 - s^2} J(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda \tag{17}$$

zu untersuchen. Dieses ist komplizierter und läßt sich nicht so einfach in exakter Weise behandeln. Für den Fall $\left|\frac{k_2^2}{k_1^2}\right| \gg 1$ indessen können wir uns leicht einen Überblick verschaffen. Wenn wir uns nämlich die auf S. 66 hervorgehobene Tatsache vergegenwärtigen, daß eine geringe Differenz von k_1 und s sich erst in einer größeren Entfernung $|k_1 r|$ bemerkbar machen kann, so werden wir zunächst für die nächste Umgebung des Nullpunktes für das obige Integral jedenfalls schreiben können:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} J(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda = \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda}{\left(1 - \frac{k_1^2 - k_2^2}{\lambda^2 - k_2^2}\right)^{1/2}}$$

und da $\left|\frac{k_1^2 - k_2^2}{\lambda^2 - k_2^2}\right|$ auf dem ganzen Integrationsweg immer < 1 gehalten werden kann, wenn man denselben in der komplexen Ebene geeignet deformiert, so erhalten wir hierfür:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} J(\lambda r)\lambda \, d\lambda = \int_0^\infty J(\lambda r)\,\lambda\, d\lambda \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{\lambda^2 - k_2^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{8}\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{\lambda^2 - k_2^2}\right)^2 + \ldots\right\} \quad (18)$$

Beachten wir dann die bekannte Formel:[1])

$$\int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\lambda\, d\lambda}{(\lambda^2 - k_2^2)^{n+1}} = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{r}{k_2}\right)^n \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{\Gamma(1+n)} H_1^{-n}(k_2 r)$$

und wenden dieselbe auf die einzelnen Glieder der Summe Gleichung (18) an, so erhalten wir

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\lambda^2 - s^2} J(\lambda r)\lambda\, d\lambda = \frac{k_1^2 - k_2^2}{4}\pi i \left\{H_1^0(k_2 r) + \right.$$
$$+ \frac{3}{8}\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_2^2}(k_2 r) H_1^{-1}(k_2 r) +$$
$$\left. + \frac{5}{64}\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_2^2}\right)^2 (k_2 r)^2 H_1^{-2}(k_2 r) + \ldots\right\} \quad (18a)$$

Da das Unendlichwerden von $H^{n>0}(x)$ für $x = 0$ gegeben ist durch

$$\lim_{x=0} H_1^{n<0}(x) = \lim_{x=0} \text{const}\, H_1^{n>0}(x) = \frac{\text{const}}{x^n}$$

so bleiben also alle Glieder der Summe der Gleichung (18a) endlich bis auf das erste und für dieses ist die Art des Unendlichwerdens gegeben durch:

---

1) S. u. a. Nielsen, l. c. S. 221. Es sei bemerkt, daß für $n = -\frac{1}{2}$ diese Formel liefert:

$$\int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} = \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Wir haben diesen Zusammenhang bereits auf S. 14 benutzt.

$$\lim_{x=0} H_1^0(x) = \text{const} + \log x$$

Wir sehen also, daß wenn man auf der Ebene $z = 0$ sich dem Nullpunkt nähert, die Ableitung $\frac{\partial \Phi}{\partial z_{z=0}}$ logarithmisch unendlich wird, denn z. B. für das erste Medium ist:

$$\frac{k_1^4 - k_2^4}{k_1^2 k_2^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{z=0}} = \frac{1}{k_2^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\lambda^2 - s^2} J(\lambda r)\lambda\, d\lambda -$$

$$- \frac{1}{k_1^2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 - k_1^2}{\lambda^2 - s^2} J(\lambda r)\lambda\, d\lambda$$

Durch Addition und Subtraktion von:

$$\frac{1}{k_1^2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 - s^2}{\lambda^2 - s^2} J(\lambda r)\lambda\, d\lambda = \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ik_1 R}}{R_{z=0}} = 0$$

geht der zweite Term über in:

$$+ \frac{k_1^2 - s^2}{k_1^2} \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\lambda\, d\lambda}{\lambda^2 - s^2} = \frac{k_1^2 - s^2}{k_1^2} \cdot \frac{\pi i}{2} H_1^0(s r),$$

so daß:

$$\frac{k_1^4 - k_2^4}{k_1^2 k_2^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{z=0}} = \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2 k_2^2} + \frac{k_1^2 - s^2}{k_1^2} \right) \frac{\pi i}{2} \log r \text{ wird für } \lim r = 0$$

oder

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_{z=0}} \cong \frac{\pi i}{4} \frac{k_1^2}{k_2^2} \log r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi - \frac{e^{ik_1 R}}{R} \right)_{z=0}$$

Während also $\Phi_{z=0}$ selbst sich im Nullpunkt wesentlich ebenso verhält wie $\frac{e^{ik_1 R}}{R}$ ist das für die Ableitungen nicht mehr der Fall.

Jetzt wollen wir den Fall größerer $|k_2 r|$ ins Auge fassen. Hier kann k_1 nicht mehr ohne weiteres in Gleichung (17) mit s identifiziert werden. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß trotzdem auch hier noch das Verhalten von

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} J(\lambda r)\lambda\, d\lambda$$

für den Einfluß von $\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$ im Integranden maßgebend ist. Man kann nämlich schreiben:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\lambda^2 - s^2} J(\lambda r)\lambda\, d\lambda = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \cdot \frac{J(\lambda r)\lambda\, d\lambda}{1 - \frac{s^2 - k_1^2}{\lambda^2 - k_1^2}} =$$

$$= \lim_{z=0} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} J(\lambda r)\lambda\, d\lambda\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} \left\{1 + \frac{s^2 - k_1^2}{\lambda^2 - k_1^2} + \ldots\right\}$$

Hier entsteht jedes weitere Glied aus dem vorhergehenden durch Integrationen nach z, sobald also im ersten Term im Integranden $\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$ keine Rolle mehr spielt, wird dies auch für die weiteren Glieder und endlich für die ganze Summe der Fall sein.

Wenn wir nun für $\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$ schreiben:

$$\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} = \sqrt{k_1^2 - k_2^2}\sqrt{1 + \frac{\lambda^2 - k_1^2}{k_1^2 - k_2^2}}$$

und die Wurzel entwickeln, so ergibt sich die halbkonvergente Darstellung:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} J(\lambda r)\lambda\, d\lambda &= \sqrt{k_1^2 - k_2^2} \int_0^\infty \frac{J(\lambda r)\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \left\{1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2 - k_1^2}{k_1^2 - k_2^2} + \right.\\ &\left. + \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda^2 - k_1^2}{k_1^2 - k_2^2}\right)^2 - \ldots\right\}\\ &= \sqrt{k_1^2 - k_2^2}\left\{\frac{e^{ik_1 r}}{r} - \frac{1}{2(k_1^2 - k_2^2)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{e^{ik_1 R}}{R}_{z=0} + \right.\\ &\left. + \frac{1}{8(k_1^2 - k_2^2)^2}\frac{\partial^4}{\partial z^4}\frac{e^{ik_1 R}}{R}_{z=0}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (18\,b)$$

und wenn man die angedeuteten Differentiationen ausführt:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} J(\lambda r)\lambda\, d\lambda = \sqrt{k_1^2 - k_2^2}\,\frac{e^{ik_1 r}}{r}\left\{1 - \frac{(ik_1 r - 1)}{2(k_1^2 - k_2^2)r^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3(ik_1 r)^2 - 9(ik_1 r) + 1}{8(k_1^2 - k_2^2)^2 r^4} + \ldots\right\}$$

Wir sehen, daß auch hier bei $|k_2 r| = 5$ bereits das erste Glied allein maßgebend ist und wollen daher auch weiterhin $\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$

allemal einfach durch den Faktor $\sqrt{s^2 - k_2^2}$ ersetzen, unter der Beschränkung $|k_2 r| \geqq 5$.

Damit sind wir nun in der Lage, die Funktion Φ nach steigenden Potenzen von z zu entwickeln. Dabei ist zu beachten, daß alle ungeraden Ableitungen von $\frac{e^{ik_1 R}}{R}$ nach z für $z = 0$ verschwinden, daß zweitens

$$\lim_{z=0} \int_0^\infty \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, e^{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} J(\lambda r) \lambda\, d\lambda =$$

$$= \lim_{z=0} \int_0^\infty \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, e^{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} J(\lambda r) \lambda\, d\lambda$$

ist, wofür sich ein strenger Beweis erbringen läßt, den wir im Interesse der Kürze indessen nur erwähnen wollen, und daß endlich alle im Zähler des Integranden auftretenden Polynome $(\lambda^2 - k^2)^n$ durch Addition und Subtraktion entsprechender anderer Polynome beseitigt werden können, wofür wir auf das Beispiel auf S. 69 verweisen. Die einfachen, hierher gehörigen Rechnungen wollen wir nicht anführen und geben gleich die Resultate wieder:

Erstes Medium.

a) Erster Term: $$\Phi^{(1)} = \frac{k_1^2}{k_1^4 - k_2^4} \sqrt{s^2 - k_2^2} \int_0^\infty \frac{J(\lambda r) \lambda\, d\lambda\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z}}{\lambda^2 - s^2}$$

Hier wird, wenn wir noch zur Abkürzung das Integral des zweiten Terms in Gleichung (1) mit B bezeichnen; für $z = 0$

$$\Phi^{(1)} = \frac{k_1^2}{k_1^4 - k_2^4} \cdot \sqrt{s^2 - k_2^2}\, \frac{\pi i}{2} H_1^0(s r)$$

$$\Phi^{(1)\,\mathrm{I}} = -\frac{k_1^2}{k_1^4 - k_2^4} \cdot \sqrt{s^2 - k_2^2}\, B_0$$

$$\Phi^{(1)\,\mathrm{II}} = \frac{k_1^2}{k_1^4 - k_2^4} \sqrt{s^2 - k_2^2}\, \frac{\pi i}{2} H_1^0(s r)(s^2 - k_1^2)$$

$$\Phi^{(1)\,\mathrm{III}} = -\frac{k_1^2}{k_1^4 - k_2^4} \sqrt{s^2 - k_2^2} \left\{ B_0 (s^2 - k_1^2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{ik_1 R}}{R}_{z=0} \right\}$$

$$\Phi^{(1)\,\mathrm{IV}} = \frac{k_1^2}{k_1^4 - k_2^4} \sqrt{s^2 - k_2^2}\, \frac{\pi i}{2} H_1^0(s r)(s^2 - k_1^2)^2$$

$$\Phi^{(1)\ \mathrm{V}} = -\frac{k_1^{\,2}}{k_1^{\,4}-k_2^{\,4}}\cdot\sqrt{s^2-k_2^{\,2}}\left\{B_0(s^2-k_1^{\,2})^2+\right.$$

$$\left.+(s^2-k_1^{\,2})\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{e^{ik_1R}}{R}_{z=0}+\frac{\partial^4}{\partial z^4}\frac{e^{ik_1R}}{R}_{z=0}\right\}$$

$$\Phi^{(1)\ \mathrm{VI}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wenn wir jede Ableitung mit $\frac{z^n}{n!}$ multiplizieren und alles summieren, so erhalten wir:

$$\Phi^{(1)} = \frac{k_1}{k_1^{\,4}-k_2^{\,4}}\sqrt{s^2-k_2^{\,2}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\pi i}{2}H_1^{\,0}(s\,r)\,\mathfrak{Cof}(-\sqrt{s^2-k_1^{\,2}}\,z)+\\ \qquad+\dfrac{1}{\sqrt{s^2-k_1^{\,2}}}B_0\,\mathfrak{Sin}(-\sqrt{s^2-k_1^{\,2}}\,z)\\ -\dfrac{z^3}{5!}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\dfrac{e^{ik_1R}}{R}_{z=0}\left(1+\dfrac{(s^2-k_1^{\,2})z^2}{4\cdot5}+\ldots\right)\\ -\dfrac{z^5}{3!}\dfrac{\partial^4}{\partial z^4}\dfrac{e^{ikR}}{R}_{z=0}\left(1+\dfrac{(s^2-k_1^{\,2})z^2}{6\cdot7}+\ldots\right)\\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\quad(20\,\mathrm{a})$$

b) Zweiter Term: $\Phi^{(2)} = -\frac{k_2^{\,2}}{k_1^{\,4}-k_2^{\,4}}\cdot B.$

$$\Phi^{(2)} = -\frac{k_2^{\,2}}{k_1^{\,4}-k_2^{\,4}}\cdot B_0$$

$$\Phi^{(2)\ \mathrm{I}} = +\frac{k_1^{\,2}}{k_1^{\,4}-k_2^{\,4}}\cdot\frac{\pi i}{2}H_1^{\,0}(s\,r)(s^2-k_1^{\,2})$$

$$\Phi^{(2)\ \mathrm{II}} = -\frac{k_2^{\,2}}{k_1^{\,4}-k_2^{\,4}}\left\{B_0(s^2-k_1^{\,2})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{e^{ik_1R}}{R}_{z=0}\right\}$$

$$\Phi^{(2)\ \mathrm{III}} = +\frac{k_2^{\,2}}{k_1^{\,4}-k_2^{\,4}}\cdot\frac{\pi i}{2}H_1^{\,0}(s\,r)(s^2-k_1^{\,2})^2$$

$$\Phi^{(2)\ \mathrm{IV}} = -\frac{k_2^{\,2}}{k_1^{\,4}-k_2^{\,4}}\left\{B_0(s^2-k_1^{\,2})^2+(s^2-k_1^{\,2})\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{e^{ik_1R}}{R}_{z=0}+\frac{\partial^4}{\partial z^4}\frac{e^{ik_1R}}{R}_{z=0}\right\}$$

$$\Phi^{(2)\ \mathrm{V}} = +\frac{k_2^{\,2}}{k_1^{\,2}-k_2^{\,4}}\cdot\frac{\pi i}{2}H_1^{\,0}(s\,r)(s^2-k_1^{\,2})^3$$

$$\Phi^{(2)\,\mathrm{VI}} = -\frac{{k_2}^2}{{k_1}^4 - {k_2}^4}\left\{B_0({s^2} - {k_1}^2)^3 + ({s^2} - {k_1}^2)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\frac{e^{ik_1R}}{R_{z=0}} + \right.$$
$$\left. + ({s^2} - {k_1}^2)\frac{\partial^4}{\partial z^4}\,\frac{e^{ik_1R}}{R_{z=0}} + \frac{\partial^6}{\partial z^6}\,\frac{e^{ik_1R}}{R_{z=0}}\right\}$$
$$\vdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und die Summation ergibt:

$$\Phi^{(2)} = \frac{{k_2}^2}{{k_1}^4 - {k_2}^4}\left\{-1\sqrt{{s^2} - {k_1}^2}\,\frac{\pi i}{2}\,\mathfrak{Sin}(-\sqrt{{s^2} - {k_1}^2}\,z) - \right.$$
$$- B_0\,\mathfrak{Cof}(-\sqrt{{s^2} - {k_1}^2}\,z)\,\frac{\sqrt{{s^2} - {k_1}^2}}{\sqrt{{s^2} - {k_1}^2}} -$$
$$- \frac{z^2}{2!}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\frac{e^{ik_1R}}{R_{z=0}}\left(1 + \frac{({s^2} - {k_1}^2)z^2}{3\cdot 4} + \cdots\right)$$
$$- \frac{z^4}{4!}\,\frac{\partial^4}{\partial z^4}\,\frac{e^{ik_1R}}{R_{z=0}}\left(1 + \frac{({s^2} - {k_1}^2)z^2}{5\cdot 6} + \cdots\right)$$
$$\left. - \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\right\} \tag{20b}$$

Nun ist $\mathfrak{Cof}(x) + \mathfrak{Sin}(x) = e^x$ und nach Gleichung (8b):

$${k_1}^2\sqrt{{s^2} - {k_2}^2} = -{k_2}^2\sqrt{{s^2} - {k_1}^2} = \frac{-i{k_1}^2{k_2}^2}{\sqrt{{k_1}^2 + {k_2}^2}}$$

und daher ergibt sich für Φ:

$$\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} = \frac{-i{k_1}^2{k_2}^2}{({k_1}^4 - {k_2}^4)\sqrt{{k_1}^2 + {k_2}^2}}\left\{\frac{\pi i}{2}\,{H_1}^0(sr) + \right.$$
$$\left. + \frac{B_0}{\sqrt{{s^2} - {k_1}^2}}\right\}e^{-\sqrt{\lambda^2 - {k_1}^2}z} + F\Bigg\} \tag{21}$$

wo F im allgemeinen eine kompliziertere Funktion von z und r ist, deren Bau sich aus Gleichung (20a) und (20b) ersehen läßt. Nur im Falle geringer Höhen $|k_1 z|$ vereinfacht sich dieselbe wesentlich. Denn wenn

$$\left|\frac{({s^2} - {k_1}^2)z^2}{12}\right| = \left|\frac{{k_1}^2}{{k_1}^2 + {k_2}^2}\right| \cdot \frac{(k_1 z)^2}{12} \ll 1$$

ist, so erhält man nach Gleichung (20a) und (20b):

$$\left.\begin{aligned} F = & -\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{e^{ik_1R}}{R}_{z=0}\left\{\frac{{k_1}^2}{{k_1}^4-{k_2}^4}\sqrt{s^2-{k_2}^2}\,\frac{z^3}{3!}+\frac{{k_2}^2}{{k_1}^4-{k_2}^4}\cdot\frac{z^2}{2!}\right\} \\ & -\frac{\partial^4}{\partial z^4}\frac{e^{ik_1R}}{R}_{z=0}\left\{\frac{{k_1}^2}{{k_1}^4-{k_2}^4}\sqrt{s^2-{k_2}^2}\,\frac{z^5}{5!}+\frac{{k_1}^2}{{k_1}^4-{k_2}^4}\cdot\frac{z^4}{4!}\right\} \\ & -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F = & -\frac{{k_2}^2}{{k_1}^4-{k_2}^4}\,\frac{z^2}{2!}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\frac{e^{ik_1R}}{R}_{z=0}\left\{1-\frac{\sqrt{s^2-{k_1}^2}\,z}{3}\right\} \\ & -\frac{{k_2}^2}{{k_2}^4-{k_2}^4}\,\frac{z^4}{4!}\,\frac{\partial^4}{\partial z^4}\,\frac{e^{ik_1R}}{R}_{z=0}\left\{1-\frac{\sqrt{s^2-{k_1}^2}\,z}{5}\right\} \\ & -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

und mit der weiteren Beschränkung $\left|\frac{k_1}{k_2}\cdot\frac{k_1 z}{3}\right| \ll 1$:

$$F = -\frac{{k_2}^2}{{k_1}^4-{k_2}^4}\left\{\frac{e^{ik_1R}}{R}-\frac{e^{ik_1r}}{r}\right\} \quad (22\,a)$$

Für $z = 0$ verschwindet F überhaupt und in der Nähe der Trennungsebene ist es daher von keinem Belang, so daß es hier ganz vernachlässigt werden kann.

Zweites Medium.

Hier ist der Integrand von Φ mit $e^{+\sqrt{\lambda^2-{k_2}^2}\,z}$ von z abhängig. Jede Differentiation nach z liefert also eine neue Potenz von $\sqrt{\lambda^2-{k_2}^2}$ in den Zähler des Integranden. Wenn wir auch hier $(\sqrt{\lambda^2-{k_2}^2})$ durch $(\sqrt{s^2-{k_2}^2})^n$ ersetzen dürfen, was ohne weiteres wahrscheinlich ist, so würde die Abhängigkeit z einfach gegeben sein durch

$$\Phi = \Phi_{z=0}\cdot e^{\sqrt{s^2-{k_2}^2}\,z}$$

Eine genauere Betrachtung, die wir nicht anführen wollen, zeigt nun, daß dieses summarische Vorgehen in der Tat für die ersten 4 Ableitungen statthaft ist, wenn noch die Beschränkung:

$$|ik_1 r| > 1{,}5, \quad \text{also} \quad r > \frac{1}{4}\,l$$

eingeführt wird. Für noch kleinere Werte von $|k_1 r|$ sind schon erheblichere Korrekturen notwendig.

Solange also diese Bedingung erfüllt ist und die betrachteten Tiefen klein sind, besteht die obige Gleichung zu Recht.

Damit können wir unsere Resultate formulieren.

Erstes Medium.

$$|k_2 r| \geqq 5 \qquad \left|\frac{k_2^2}{k_1^2}\right| \geqq 13 \tag{23}$$

$$\Phi = \frac{-i k_1^2 \cdot k_2^2}{(k_1^4 - k_2^4)\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left\{ \frac{\pi i}{2} H_1^0(s r) + \frac{B_0}{\sqrt{s^2 - k_1^2}} \right\} e^{-\sqrt{s^2 - k_1^2} z} + F$$

$$F = -\frac{k_2^2}{k_1^4 - k_2^4} \left\{ \frac{e^{i k_1 R}}{R} - \frac{e^{i k_1 r}}{r} \right\} \text{ für } \left| \frac{k_1}{k_2} \frac{k_1 z}{3} \right| \ll 1, \quad = 0 \text{ für } z = 0$$

$$B_0 = \frac{e^{i k_1 r}}{r} \left\{ 1 - \frac{2}{1}\alpha^2 + \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\alpha^4 - \dots \right\} \dots |\alpha^2| = |i(k_1 - s) r| < 5$$

$$B_0 = \frac{\pi i}{2} H_1^0(s r)\sqrt{s^2 - k_1^2} - \frac{e^{i k_1 r}}{r} \left\{ \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\alpha^4} + \dots \right\} \dots |\alpha^2| > 5$$

$$\frac{\pi i}{2} H_1^0(s r) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{i s r}}{\sqrt{s r}} \left\{ 1 - \frac{i}{8 s r} - \frac{9}{128 (s r)^2} + \dots \right\}$$

Zweites Medium.

$$|k_2 r| \geqq 5 \qquad \left|\frac{k_2^2}{k_1^2}\right| \geqq 13 \qquad |k_1 r| \geqq 1{,}57 \tag{24}$$

$$\Phi = -\frac{i k_1^2 k_2^2}{(k_1^4 - k_2^4)\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \left\{ \frac{\pi i}{2} H_1^0(s r) + \frac{B_0}{\sqrt{s^2 - k_1^2}} \right\} e^{\sqrt{s^2 - k_2^2} z}$$

§ 5. Entwickelungen in der Nähe des Senders.

Im Anschluß hieran untersuchen wir noch das Verhalten des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z}\, \lambda\, d\lambda$$

in der Nähe des Nullpunktes, wobei also sowohl z als r zunächst beibehalten werden.

1. Bei nicht zu kleinem $|k_1 z|$ können wir die Formel der Gleichung (18b) ohne weiteres auf den Fall $z > 0$ anwenden. Wenn z den festen Wert a hat, so wird

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\frac{e^{ik_1R}}{R_{z=a}} = \frac{e^{ik_1R}}{R^3}\left\{-1 + ik_1R\left(1 - 3\left(\frac{a}{R}\right)^2\right) + 3\left(\frac{a}{R}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + (ik_1R)^2\left(\frac{a}{R}\right)^2\right\}$$

Die Bedingungen dafür, daß die Reihe in Gleichung (18b) mit dem ersten Glied abgebrochen werden darf, sind also, wie man leicht sieht:

$$\left|\frac{k_1^2}{k_2^2}\right| \cdot \frac{1}{(k_1R)^2} \ll 1 \quad \text{und} \quad \left|\frac{k_1^2}{k_2^2}\right| \ll 1$$

In diesem Falle ist:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\,z}\, \lambda\, d\lambda = \sqrt{k_1^2 - k_2^2}\,\frac{e^{ik_1R}}{R} \tag{25}$$

Um bei sehr kleinen Werten von $k_1 z$ mit r in den Nullpunkt hineingehen zu können, entwickeln wir zunächst in folgender Weise:

$$\frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} = \sqrt{1 + \frac{k_1^2 - k_2^2}{\lambda^2 - k_1^2}} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{k_1^2 - k_2^2}{\lambda^2 - k_1^2} - \frac{1}{8}\,\frac{(k_1^2 - k_2^2)^2}{(\lambda^2 - k_1^2)^2} + \dots$$

und erhalten:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\,z}\, J(\lambda r)\,\lambda\, d\lambda = \\ &= \int_0^\infty J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}\,z}\,\lambda\, d\lambda\left\{1 + \frac{1}{2}\,\frac{k_1^2 - k_2^2}{\lambda^2 - k_1^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{\lambda^2 - k_1^2}\right)^2 + \dots\right\}\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Diese Reihe ist natürlich semikonvergent, bei kleinen Werten von $|k_1 z|$ und $\left|\frac{r}{z}\right|$ indessen sehr wohl brauchbar. Dies zeigt sich, wenn man $J(\lambda r)$ in eine Reihe entwickelt. Man erhält dann für das zweite Glied:

$$\frac{1}{2}(k_1^2 - k_2^2)\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\,z}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}\,\lambda\, d\lambda\left(1 + \frac{1}{4}\lambda^2 r^2 + \dots\right)$$

oder mit der Substitution: $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z = u$ und unter Verwendung der auf S. 61 bereits erwähnten Funktion $Ei(x) = \int_{\infty}^{-x} \frac{e^{-u}}{u} du$:

$$\frac{1}{2}(k_2^2 - k_1^2)\left\{Ei(i k_1 z) - \frac{1}{4} r^2 \left(\frac{d^2}{dz^2} + k_1^2\right) Ei(i k_1 z) + \ldots\right\}^{1)}$$

Beschränkt man sich noch auf sehr kleine Werte von $|k_1 r|$ und $|k_1 z|$, so erhält man schließlich für diesen Term:

$$\frac{k_1^2}{2}\left(\frac{k_2^2}{k_1^2} - 1\right)\left\{\log(i k_1 z) + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{z}\right)^2 + \ldots\right\}$$

Das erste Glied der Gleichung (26) dagegen ergibt einfach:

$$-\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{i k_1 R}}{R} = k_1^2 \frac{k_1 z}{(k_1 R)^3}$$

für kleine Werte von $k_1 R$.

Offenbar kann $k_1 R$ immer so klein gewählt werden, daß das vorhin berechnete zweite Glied gegen das erste vollkommen verschwindet.

Man hat also in unmittelbarer Umgebung des Nullpunktes:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z}\, \lambda\, d\lambda = k_1^2 \frac{k_1 z}{(k_1 R)^3} \qquad (27)$$

1) S. Janhke und Emde, Funktionentafeln. Teubner, 1909, S. 19.

Lebenslauf.

Am 21. Dezember 1878 wurde ich zu Dorpat (Livland) als Sohn des Universitätsprofessors Wilhelm v. Hoerschelmann geboren. Ich absolvierte das städtische, klassische Gymnasium im Jahre 1896 und studierte darauf ein Jahr lang an der Universität Dorpat Physik. Im Herbst 1897 bezog ich die Technische Hochschule zu Riga, und absolvierte im Frühjahre 1904 die Diplomprüfung als Maschinenbauingenieur. Ich war darauf ein Jahr lang Assistent an der Technischen Hochschule zu Riga bei Herrn Prof. Clark. Im Jahre 1905 ließ ich mich an der Universität München immatrikulieren, und arbeitete hier am Physikalischen Institute unter Leitung von Herrn Geheimrat Röntgen sowie im theoretisch-physikalischen Institut bei Herrn Prof. Sommerfeld. Gleichzeitig hörte ich in erster Linie die mathematischen Vorlesungen von Prof. Pringsheim.

Meinen hochverehrten Lehrern möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank für die empfangene Belehrung und Anregung aussprechen. Namentlich bitte ich Herrn Prof. Sommerfeld den Ausdruck meiner aufrichtigsten Dankbarkeit für sein eingehendes und förderndes Interesse an meiner Arbeit entgegenzunehmen.

München.